

ROBOT MOBILI

Vincoli anolonomi

Modello cinematico

Forma a catena

Modello dinamico

Pianificazione

Controllo del moto

Localizzazione odometrica

ROBOT MOBILI

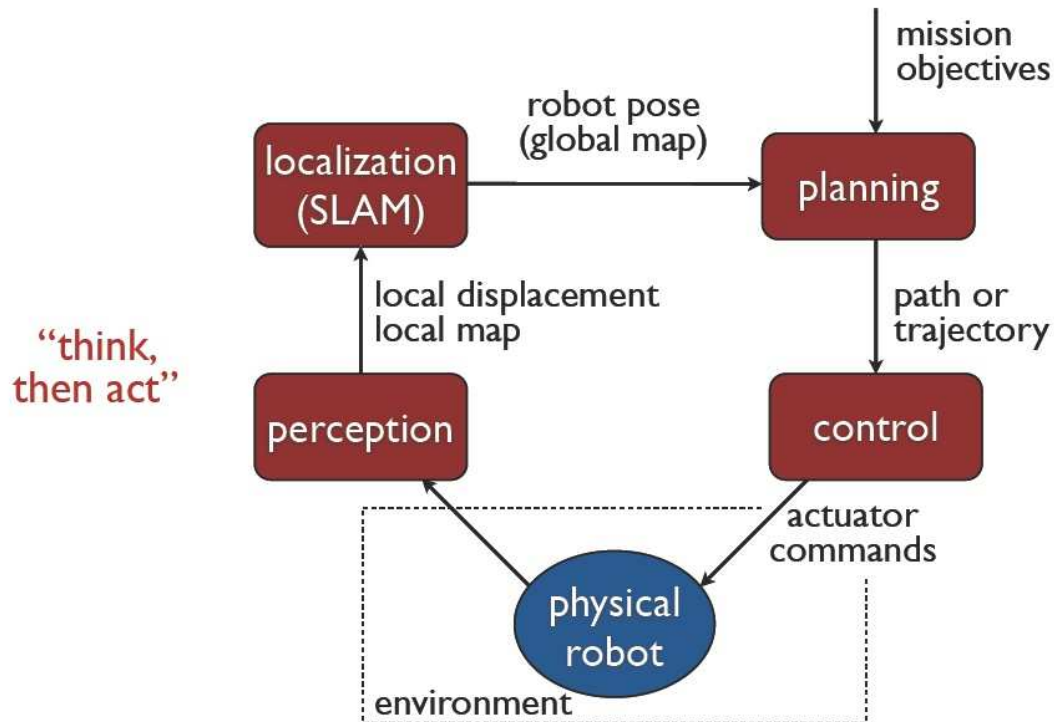
- I problemi fondamentali della robotica mobile
 - ★ localizzazione (dove sono?)
 - ★ pianificazione del percorso e della traiettoria (come raggiungo l'obiettivo?)
 - ★ controllo del moto (come faccio a muovermi?)

- Saper risolvere simultaneamente i tre problemi di sopra in ambienti
 - ★ incerti
 - ★ non strutturati
 - ★ dinamici



Autonomia

Architettura deliberativa



- Percezione

- ★ **proprioceettiva**: posizione, orientamento, velocità del robot stesso
- ★ **esterocettiva**: posizione relativa di ostacoli, altri robot, persone

- ampia gamma di sensori

- ★ proprioceettivi: encoders, inertial navigation systems (INS), global positioning systems (GPS)
- ★ esterocettivi: range finders, videocamere, sensori tattili, sensori di prossimità

Altre architetture

- architettura reattiva
 - ★ *non pensare, (re-)agisci*
- architettura ibrida
 - ★ *pensa e agisci simultaneamente*
- architettura comportamentale
 - ★ *pensa alla modalità di azione*

VINCOLI ANOLONOMI

- Vincoli cinematici che limitano la mobilità locale
 - ★ non impediscono di raggiungere qualsiasi punto dello spazio delle configurazioni (in assenza di ostacoli)

$$\mathbf{q} \in \mathcal{C}$$

- ★ localmente $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ (lo spazio delle configurazioni è una varietà topologica (*manifold*))

- Vincoli *olonomi* (*integrabili*)

$$h_i(\mathbf{q}) = 0 \quad i = 1, \dots, k < n$$

- ★ la dimensione dello spazio delle configurazioni si riduce

- Vincoli *cinematici*

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \quad i = 1, \dots, k < n$$

- ★ limitano i moti istantanei ammissibili
- ★ forma *Pfaffiana* (lineare nelle velocità)

$$\mathbf{a}_i^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad i = 1, \dots, k < n$$

$$\mathbf{a}_i : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}^n \quad \text{di classe } C^\infty$$

o in forma matriciale

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

- Se un sistema meccanico è soggetto a vincoli olonomi allora è soggetto anche a vincoli cinematici (in forma Pfaffiana)

$$h_i(\mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \frac{dh_i(\mathbf{q})}{dt} = \frac{\partial h_i(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

- Il viceversa è vero solo se il vincolo cinematico è *integrabile*, altrimenti esso si dice *anolonomo*

★ condizione di integrabilità per un singolo vincolo Pfaffiano

$$\exists h(\mathbf{q}) : \frac{\partial h}{\partial \mathbf{q}} = \gamma(\mathbf{q}) \mathbf{a}^T(\mathbf{q})$$

con *fattore di integrazione* $\gamma(\mathbf{q}) \neq 0$, e quindi

$$h(\mathbf{q}) = c \quad \text{superficie di livello di dimensione } n - 1$$

perdita di accessibilità dello spazio delle configurazioni

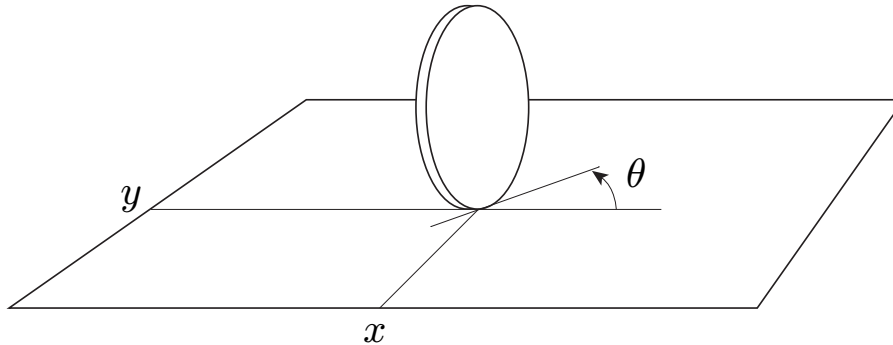


vincolo olonomo

- I vincoli anolonomi non riducono la dimensione dello spazio delle configurazioni però limitano la mobilità del sistema

★ sono ammissibili solo le velocità nel $\mathcal{N}(\mathbf{a}^T(\mathbf{q}))$

Esempio



- Disco che rotola senza strisciare

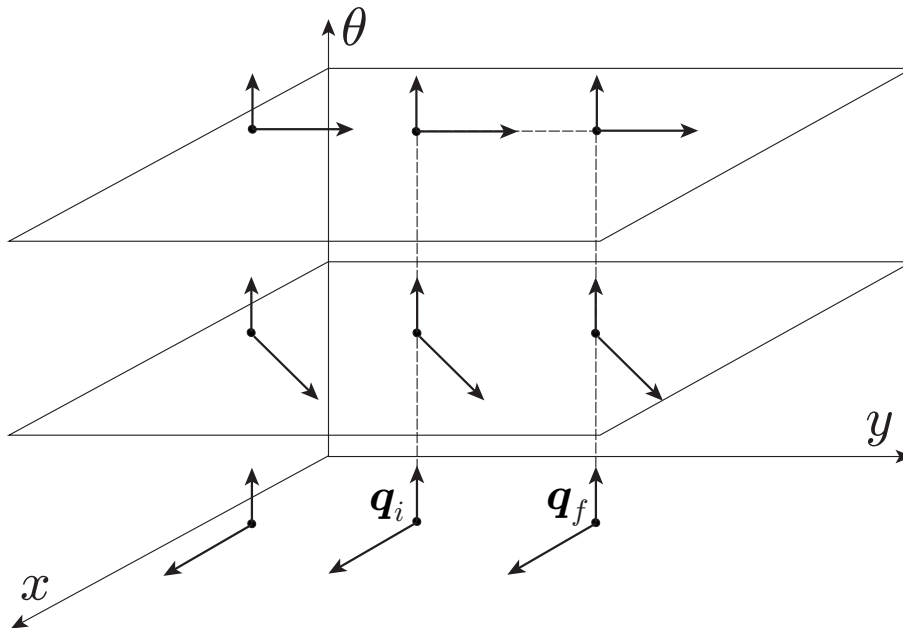
- ★ coordinate generalizzate

$$\mathbf{q} = [x \quad y \quad \theta]^T$$

- ★ vincolo cinematico (puro rotolamento)

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = [\sin \theta \quad -\cos \theta \quad 0] \dot{\mathbf{q}} = 0$$

la velocità lineare del punto di contatto non può avere componenti lungo la direzione normale al piano sagittale
la velocità di rotazione del disco intorno all'asse verticale è libera



- non c'è perdita di accessibilità
- il disco può essere condotto da una qualunque configurazione $\mathbf{q}_i = [x_i \ y_i \ \theta_i]^T$ a una qualunque configurazione $\mathbf{q}_f = [x_f \ y_f \ \theta_f]^T$ senza violare il vincolo con la sequenza di tre manovre
 - ★ ruoto il disco intorno all'asse verticale in modo che l'asse sagittale passi per il punto (x_f, y_f)
 - ★ rotolo il disco fino a raggiungere (x_f, y_f)
 - ★ ruoto attorno all'asse verticale fino a che $\theta = \theta_f$

Condizioni di integrabilità

- Per stabilire se il vincolo è olonomo o anolonomo, occorre stabilire se esso è integrabile o no
- Condizione necessaria e sufficiente affinché un *singolo* vincolo Pfaffiano

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^n a_j(\mathbf{q})\dot{q}_j = 0$$

sia integrabile, è l'esistenza di una funzione scalare $h(\mathbf{q})$ e un fattore di integrazione $\gamma(\mathbf{q}) \neq 0$ tali che

$$\gamma(\mathbf{q})a_j(\mathbf{q}) = \frac{\partial h(\mathbf{q})}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, n$$

- Una condizione equivalente che non contiene la funzione incognita $h(\mathbf{q})$ si ottiene applicando il teorema di Schwarz sulle derivate seconde

$$\frac{\partial(\gamma a_k)}{\partial q_j} = \frac{\partial(\gamma a_j)}{\partial q_k} \quad j, k = 1, \dots, n, \quad j \neq k$$

★ basta osservare che, per il suddetto teorema

$$\frac{\partial(\gamma a_j)}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\partial(\gamma a_k)}{\partial q_j}$$

- Nel caso di vincoli Pfaffiani multipli, useremo un diverso approccio

Esempio

- Si consideri il vincolo cinematico di puro rotolamento del disco su un piano orizzontale

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = [\sin \theta \quad -\cos \theta \quad 0][\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\theta}]^T = 0$$

- ★ applicando la condizione di integrabilità

$$\sin \theta \frac{\partial \gamma}{\partial y} = -\cos \theta \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\cos \theta \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \gamma \sin \theta$$

$$\sin \theta \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = -\gamma \cos \theta$$

- ★ quadrando e sommando le ultime due risulta $\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \pm \gamma$, per cui

$$\gamma \cos \theta = \gamma \sin \theta$$

$$\gamma \sin \theta = -\gamma \cos \theta$$

che ha come unica soluzione $\gamma = 0$ e quindi il vincolo non è integrabile per cui è anolonomo

MODELLO CINEMATICO

- Consideriamo un sistema di k vincoli Pfaffiani

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

- ★ le velocità ammissibili sono quelle che appartengono al $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T(\mathbf{q}))$ che ha dimensione $n - k$, una cui base sia

$$\{ \mathbf{g}_1(\mathbf{q}), \dots, \mathbf{g}_{n-k}(\mathbf{q}) \}$$

- ★ dunque le velocità ammissibili sono tali che

$$\dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\mathbf{q})u_j = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u} \quad m = n - k$$

- Tale equazione può essere vista come quella di un sistema dinamico non lineare del primo ordine con stato $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ e ingresso di controllo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$
 - ★ le soluzioni del sistema sono le traiettorie $\mathbf{q}(t)$ eseguite dal sistema meccanico vincolato
 - ★ esistono infinite scelte possibili per $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ e può accadere che \mathbf{u} non abbia il significato degli ingressi di controllo

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u}$$

modello cinematico

- Si può dimostrare che l'anonomia dei vincoli cinematici è equivalente alla *controllabilità* del modello cinematico (sistema non lineare)

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u}$$

- ★ se il sistema è controllabile vuol dire che comunque date due configurazioni \mathbf{q}_i e \mathbf{q}_f in \mathcal{C} , esiste sempre un ingresso $\mathbf{u}(t)$ che porta da \mathbf{q}_i a \mathbf{q}_f , cioè esiste una traiettoria $\mathbf{q}(t)$ che unisce \mathbf{q}_i e \mathbf{q}_f rispettando i vincoli
- ★ se il sistema non è controllabile vuol dire che i vincoli cinematici riducono l'*accessibilità* di \mathcal{C} a seconda della dimensione ν del sottospazio di accessibilità

$$m < \nu < n \quad \Rightarrow \quad \text{vincoli parzialmente integrabili}$$



sistema meccanico anolonomo

$$m = \nu \quad \Rightarrow \quad \text{vincoli completamente integrabili}$$

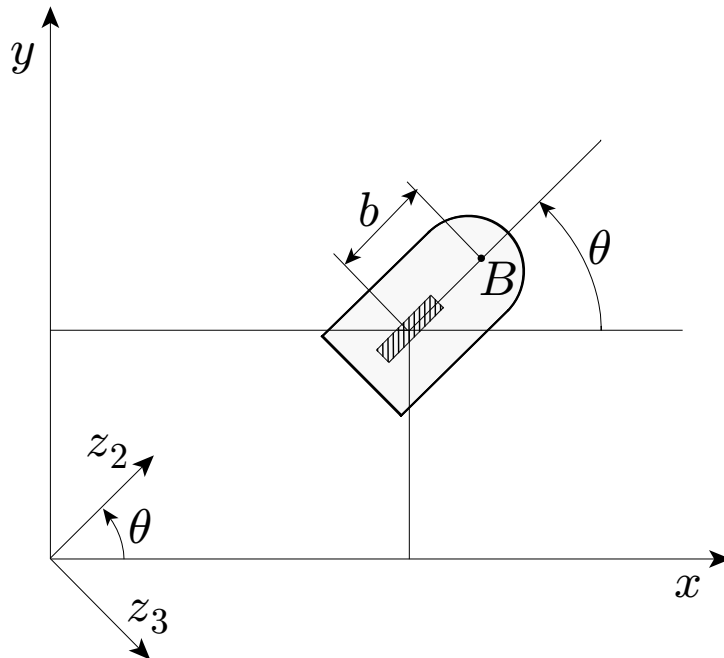


sistema meccanico olonomo

- Lo studio della controllabilità dei sistemi non lineari in generale esula dai limiti di questo corso
 - ★ nel caso di un singolo vincolo cinematico la condizione di integrabilità coincide con quella di involutività della

$$\Delta = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{n-1}\}$$

Uniciclo



- È un veicolo con una sola ruota che rotola senza strisciare
 - ★ coordinate generalizzate: $\mathbf{q} = [x \quad y \quad \theta]^T$
 - ★ vincolo cinematico di puro rotolamento

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = [\sin \theta \quad -\cos \theta \quad 0] \dot{\mathbf{q}} = 0$$

- Modello cinematico

- ★ lo spazio nullo della matrice (vettore riga) $A^T(\mathbf{q})$ ha per base $\mathbf{g}_1(\mathbf{q})$ e $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ colonne della matrice

$$G(\mathbf{q}) = [\mathbf{g}_1(\mathbf{q}) \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{q})] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ★ le velocità si possono quindi scrivere come combinazione lineare di tali colonne

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega$$

v è la velocità lineare del punto di contatto

ω è la velocità angolare del robot (rotazione intorno all'asse verticale)

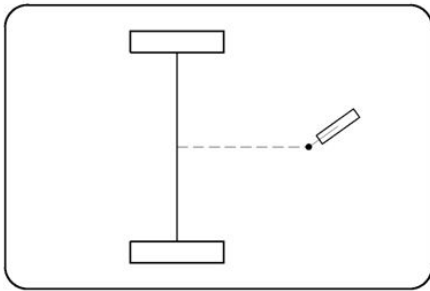
- Parentesi di Lie

$$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

sempre linearmente indipendente da $\mathbf{g}_1(\mathbf{q}), \mathbf{g}_2(\mathbf{q})$

$$\dim \Delta_{\mathcal{A}} = \dim \Delta_2 = \dim \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]\} = 3$$

- ★ l'uniciclo è controllabile con grado di anolonomia $\kappa = 2$



- I robot reali non hanno mai una sola ruota per problemi di stabilità meccanica

★ veicolo a trazione differenziale

$$v = \frac{r(\omega_R + \omega_L)}{2} \quad \omega = \frac{r(\omega_R - \omega_L)}{d}$$

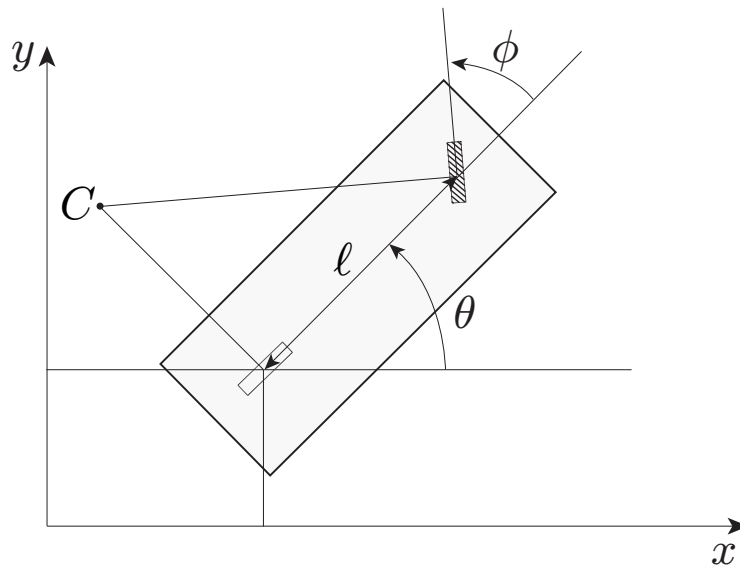
r è il raggio delle ruote

d è la distanza tra i centri delle ruote

il punto medio dell'asse delle ruote è il punto di coordinate (x, y)

θ è l'orientamento delle ruote e quindi del veicolo

Biciclo



- È un veicolo avente una ruota orientabile e una ruota fissa

★ coordinate generalizzate: $\mathbf{q} = [x \quad y \quad \theta \quad \phi]^T$

(x, y) : coordinate cartesiane del punto di contatto tra la ruota posteriore e il suolo

θ : orientamento del veicolo rispetto all'asse x

ϕ : angolo di sterzo della ruota anteriore rispetto al veicolo

- Due vincoli cinematici di puro rotolamento, uno per ogni ruota

$$\begin{aligned} \dot{x}_f \sin(\theta + \phi) - \dot{y}_f \cos(\theta + \phi) &= 0 \\ \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

★ posizione cartesiana del centro della ruota anteriore

$$x_f = x + \ell \cos \theta$$

$$y_f = y + \ell \sin \theta$$

ℓ : distanza tra le ruote

$$\dot{x} \sin(\theta + \phi) - \dot{y} \cos(\theta + \phi) - \ell \dot{\theta} \cos \phi = 0$$

- Vincoli Pfaffiani

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ \sin(\theta + \phi) & -\cos(\theta + \phi) & -\ell \cos \phi & 0 \end{bmatrix}$$

★ rango costante $k = 2 \Rightarrow$ velocità ammissibili come combinazione lineare di una base del $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T(\mathbf{q}))$ ($n - k = 2$)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \phi / \ell \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

- La ruota anteriore è orientabile $\Rightarrow u_2 = \omega$ velocità angolare di sterzo

- *Trazione anteriore*: $u_1 = v$ (velocità lineare di *trazione*)

★ modello cinematico

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \phi / \ell \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega = \mathbf{g}_1(\mathbf{q})v + \mathbf{g}_2(\mathbf{q})\omega$$

$$\mathbf{g}_3(\mathbf{q}) = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ -\cos \phi / \ell \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_4(\mathbf{q}) = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_3](\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\sin \theta / \ell \\ \cos \theta / \ell \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entrambi linearmente indipendenti da $\mathbf{g}_1(\mathbf{q})$ e $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$

↓

$$\dim \Delta_{\mathcal{A}} = \dim \Delta_3 = \dim \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4\} = 4$$

- ★ il *biciclo a trazione anteriore* è controllabile con grado di anolonomia $\kappa = 3$

- *Trazione posteriore*: $u_1 = v/\cos \phi$ (velocità lineare di *trazione*)

★ modello cinematico ($\phi \neq \pm\pi/2$)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \tan \phi/\ell \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega$$

$$\mathbf{g}_3(\mathbf{q}) = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\ell \cos^2 \phi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

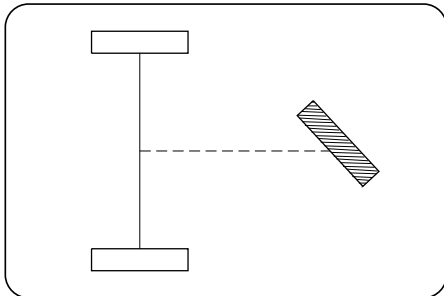
$$\mathbf{g}_4(\mathbf{q}) = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_3](\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{\ell \cos^2 \phi} \\ \frac{\cos \theta}{\ell \cos^2 \phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

linearmente indipendenti da $\mathbf{g}_1(\mathbf{q})$ e $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$.

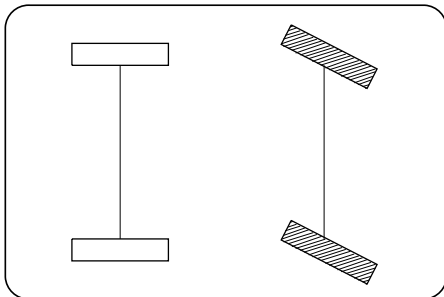
- ★ il biciclo a trazione posteriore è controllabile con grado di anolonomia $\kappa = 3$

- Veicoli cinematicamente equivalenti (meccanicamente bilanciati)

★ *triciclo*



★ *automobile*



- ★ stessi modelli cinematici (trazione anteriore o posteriore)
 (x, y) : coordinate cartesiane del punto medio dell'asse posteriore
 θ : orientamento del veicolo
 ϕ : angolo di sterzo

FORMA A CATENA

- Trasformazione del modello cinematico di un robot mobile in una forma canonica utile per risolvere problemi di pianificazione e controllo con procedure efficienti e sistematiche
- *Forma a catena* $(2, n)$: sistema dinamico a due ingressi privo di deriva

$$\dot{z} = \gamma_1(z)v_1 + \gamma_2(z)v_2$$

$$\dot{z}_1 = v_1$$

$$\dot{z}_2 = v_2$$

$$\dot{z}_3 = z_2 v_1$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_n = z_{n-1} v_1$$

- Parentesi di Lie ‘ripetute’

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad ad_{\gamma_1}^k \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ (-1)^k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$ad_{\gamma_1} \gamma_2 = [\gamma_1, \gamma_2] \quad ad_{\gamma_1}^k \gamma_2 = [\gamma_1, ad_{\gamma_1}^{k-1} \gamma_2]$$

- Distribuzione di accessibilità

$$\Delta_{\mathcal{A}} = \text{span} \{ \gamma_1, \gamma_2, \text{ad}_{\gamma_1} \gamma_2, \dots, \text{ad}_{\gamma_1}^{n-2} \gamma_2 \}$$

★ il sistema è controllabile con grado di anolonomia $\kappa = n - 1$

- Condizioni necessarie e sufficienti per trasformare un generico sistema dinamico a due ingressi privo di deriva

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}_1(\mathbf{q})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{q})u_2$$

nella forma a catena

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{q}) \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{q})\mathbf{u}$$

- Modello cinematico dell'uniciclo

- ★ cambiamento di coordinate

$$z_1 = \theta$$

$$z_2 = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$z_3 = x \sin \theta - y \cos \theta$$

- ★ trasformazione di ingressi

$$v = v_2 + z_3 v_1$$

$$\omega = v_1$$

↓

- ★ forma a catena (2,3)

$$\dot{z}_1 = v_1$$

$$\dot{z}_2 = v_2$$

$$\dot{z}_3 = z_2 v_1$$

- Modello cinematico del biciclo

- ★ cambiamento di coordinate

$$z_1 = x$$

$$z_2 = \frac{1}{\ell} \sec^3 \theta \tan \phi$$

$$z_3 = \tan \theta$$

$$z_4 = y$$

- ★ trasformazione di ingressi

$$v = \frac{v_1}{\cos \theta}$$

$$\omega = -\frac{3}{\ell} v_1 \sec \theta \sin^2 \phi + \frac{1}{\ell} v_2 \cos^3 \theta \cos^2 \phi$$

↓

- ★ forma a catena (2,4) ($\theta \neq \pm k\pi/2, k = 1, 2, \dots$)

$$\dot{z}_1 = v_1$$

$$\dot{z}_2 = v_2$$

$$\dot{z}_3 = z_2 v_1$$

$$\dot{z}_4 = z_3 v_1$$

MODELLO DINAMICO

- Come per i manipolatori, tenendo conto dei vincoli anolonomi sulle velocità generalizzate \implies No linearizzazione completa mediante retroazione dello stato!
- Sistema meccanico n -dimensionale soggetto a $k < n$ vincoli Pfaffiani

★ Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}(\mathbf{q})$$

\Downarrow

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}$$

★ $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ è una matrice ($n \times m$) che trasforma gli $m = n - k$ ingressi esterni $\boldsymbol{\tau}$ in forze generalizzate che compiono lavoro su \mathbf{q}

★ Modello dinamico del *sistema vincolato*

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \right)^T + \left(\frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T$$

$$\star G(\mathbf{q}) : A^T(\mathbf{q})G(\mathbf{q}) = O$$

$$\dot{\mathbf{q}} = G(\mathbf{q})\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{q}) v_i$$

- Modello dinamico *ridotto*

$$G^T(\mathbf{q}) (B(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) = G^T(\mathbf{q})S(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}$$

- ★ derivando il modello cinematico e sostituendo nel modello dinamico ridotto

$$M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{m}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = G^T(\mathbf{q})S(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}$$

$$M(\mathbf{q}) = G^T(\mathbf{q})B(\mathbf{q})G(\mathbf{q})$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = G^T(\mathbf{q})B(\mathbf{q})\dot{G}(\mathbf{q})\mathbf{v} + G^T(\mathbf{q})\mathbf{n}(\mathbf{q}, G(\mathbf{q})\mathbf{v})$$

$$\dot{G}(\mathbf{q})\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \left(v_i \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \right) G(\mathbf{q})\mathbf{v}$$

- ★ modello *ridotto nello spazio di stato*

$$\dot{\mathbf{q}} = G(\mathbf{q})\mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = M^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{m}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) + M^{-1}(\mathbf{q})G^T(\mathbf{q})S(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}$$

- Linearizzazione parziale via retroazione

- ★ ipotesi

$$\det (\mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q})) \neq 0$$

- ★ controllo linearizzante

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q}))^{-1}(\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{a} + \mathbf{m}(\mathbf{q}, \mathbf{v}))$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$$

- ★ misura di \mathbf{v} richiesta (non direttamente accessibile)

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q}))^{-1} \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

- Modello *cinematico del secondo ordine* del sistema meccanico vincolato

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

- Uniciclo

- ★ massa m
- ★ momento d'inerzia I intorno all'asse verticale passante per il punto di contatto col suolo
- ★ forza di trazione τ_1
- ★ coppia rotante τ_2

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \lambda$$

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}(\mathbf{q})$$

$$\mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \mathbf{O}$$

- ★ modello ridotto nello spazio di stato

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}$$

- ★ controllo linearizzante

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

\Downarrow

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

PIANIFICAZIONE

- Separazione cammino-legge oraria

$$\mathbf{q}(t) \quad t \in [t_i, t_f]$$

$$\mathbf{q}(t_i) = \mathbf{q}_i \quad \mathbf{q}(t_f) = \mathbf{q}_f$$

★ *cammino*

$$\mathbf{q}(s), \quad s \in [0, L] : \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{q}(L) = \mathbf{q}_f$$

$$\frac{d\mathbf{q}(s)}{ds} \neq \mathbf{0} \quad \forall s$$

★ *legge oraria*

$$s(t), \quad s(t_i) = 0, \quad s(t_f) = L$$

$$\dot{s}(t) \geq 0, \quad t \in [t_i, t_f]$$

- la velocità nello spazio delle configurazioni è allora parallela alla tangente al cammino

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{d\mathbf{q}}{ds} \dot{s} = \mathbf{q}' \dot{s}$$

- I vincoli anolonomi cui è soggetto il robot mobile sono allora

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\mathbf{q}'\dot{s} = \mathbf{0}$$

$$\Downarrow \text{ se } \dot{s}(t) > 0$$

- ★ *ammissibilità geometrica*

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{q})\mathbf{q}' = \mathbf{0} \quad \forall s$$

- Il cammino $\mathbf{q}(s)$ è la soluzione del sistema dinamico non lineare

$$\mathbf{q}' = \mathbf{G}(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{u}}$$

- ★ $\tilde{\mathbf{u}}$ sono gli *ingressi geometrici*

$$\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(s)\dot{s}(t)$$

- ★ assegnati gli ingressi geometrici, il cammino è univocamente determinato
- Come fare a determinare gli ingressi geometrici tali che il corrispondente cammino soddisfi il vincolo di anolonomia?

Uscite piatte

- I modelli cinematici di molti robot mobili (tra cui unicycle e bicycle) godono della proprietà di *piattezza differenziale*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

- ★ esiste un insieme di uscite \mathbf{y} tali che lo stato e gli ingressi sono esprimibili *algebricamente* in funzione di tale uscita e un certo numero di sue derivate

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(r)})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(r)})$$

- Per l'unicycle e il bicycle le uscite piatte sono proprio la posizione (x, y) nel piano cartesiano
 - ★ per l'unicycle i cammini geometricamente ammissibili sono le soluzioni del sistema

$$x' = \cos \theta \tilde{v}$$

$$y' = \sin \theta \tilde{v}$$

$$\theta' = \tilde{\omega}$$

- Dato un cammino cartesiano $(x(s), y(s))$ lo stato ad esso associato è $\mathbf{q}(s) = [x(s) \quad y(s) \quad \theta(s)]^T$, dove

$$\theta(s) = \text{Atan2}(y'(s), x'(s)) + k\pi \quad k = 0, 1$$

- ★ $k = 0$ corrisponde alla marcia in avanti
- ★ $k = 1$ corrisponde alla marcia indietro
- Gli ingressi geometrici sono facilmente ottenibili algebricamente

$$\tilde{v}(s) = \pm \sqrt{((x'(s))^2 + (y'(s))^2)}$$

$$\tilde{\omega}(s) = \frac{y''(s)x'(s) - x''(s)y'(s)}{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}$$

- Casi particolari
 - ★ la scelta del segno di $\tilde{v}(s)$ è legata al senso di marcia
 - ★ se per qualche \bar{s} risulta $x'(\bar{s}) = y'(\bar{s}) = 0$ l'orientamento e la velocità angolare vanno calcolati per continuità (come limite per $s \rightarrow \bar{s}^-$)
 - ★ se il cammino degenera in un punto θ e $\tilde{\omega}$ non sono ricostruibili

Pianificazione di cammini mediante polinomi cartesiani

- Se il modello cinematico di un robot mobile ammette uscite piatte
 - ★ si pianifica il cammino per tali uscite
 - ★ dal modello cinematico si ricavano (algebricamente) il cammino per lo stato e i corrispondenti ingressi geometrici
 - ★ questa procedura garantisce che il cammino nello spazio delle configurazioni $\mathbf{q}(s)$ soddisfi i vincoli anolonomi
- Pianificazione per un uniciclo

- ★ configurazione iniziale $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}(0) = [x_i \quad y_i \quad \theta_i]^T$

- ★ configurazione finale $\mathbf{q}_f = \mathbf{q}(1) = [x_f \quad y_f \quad \theta_f]^T$

- ★ (x, y) sono uscite piatte \Rightarrow è sufficiente interpolare con due polinomi (cubici) $x(s)$ e $y(s)$ i valori iniziali e finali

$$x(s) = s^3 x_f - (s - 1)^3 x_i + \alpha_x s^2 (s - 1) + \beta_x s (s - 1)^2$$

$$y(s) = s^3 y_f - (s - 1)^3 y_i + \alpha_y s^2 (s - 1) + \beta_y s (s - 1)^2$$

- ★ per soddisfare le condizioni al contorno sull'orientamento

$$x'(0) = k_i \cos \theta_i \quad x'(1) = k_f \cos \theta_f$$

$$y'(0) = k_i \sin \theta_i \quad y'(1) = k_f \sin \theta_f$$

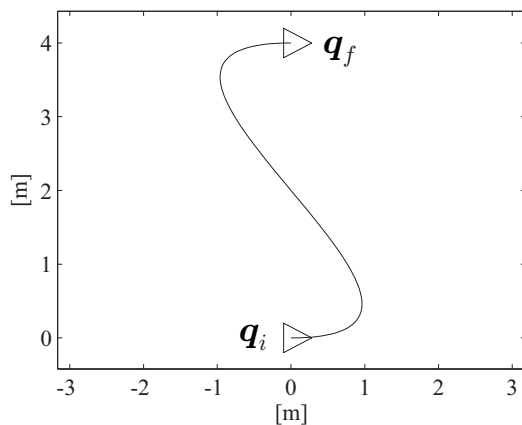
con k_i e k_f parametri liberi

★ ponendo per esempio $k_i = k_f = k > 0$ si ottiene

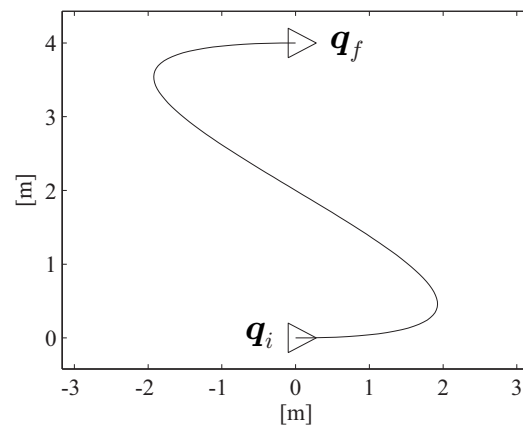
$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cos \theta_f - 3x_f \\ k \sin \theta_f - 3y_f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cos \theta_i + 3x_i \\ k \sin \theta_i + 3y_i \end{bmatrix}$$

- ★ il cammino dell'orientamento e gli ingressi geometrici vengono determinati dal modello cinematico come visto
- ★ il valore di k influenza la forma del cammino pianificato

manovra di parcheggio parallelo



$k = 10$



$k = 20$

Pianificazione di traiettorie

- Le tecniche viste finora potrebbero essere applicate anche considerando la variabile s come la variabile temporale $s = t$
 - ★ la durata della traiettoria è stabilita a priori $t_f - t_i = s_f - s_i$
 - ★ se le velocità calcolate eccedono i limiti ammissibili per il robot

$$|v(t)| < v_{\max} \quad |\omega(t)| < \omega_{\max} \quad \forall t$$

allora occorrerebbe aumentare la durata e quindi ripianificare il cammino

- Adottando invece la separazione tra cammino e legge oraria, è sufficiente scalare uniformemente la traiettoria

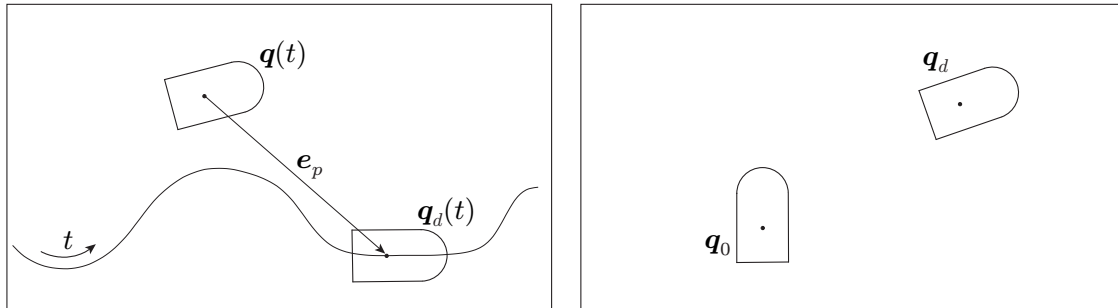
$$v(t) = \tilde{v}(s)\dot{s}(t) = \tilde{v}(s)\frac{ds}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \tilde{v}(s)\frac{ds}{d\tau}\frac{1}{T}$$

$$\omega(t) = \tilde{\omega}(s)\dot{s}(t) = \tilde{\omega}(s)\frac{ds}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \tilde{\omega}(s)\frac{ds}{d\tau}\frac{1}{T}$$

con $\tau = t/T$ e $T = t_f - t_i$ sufficientemente alto in modo da rispettare i limiti di velocità

- La legge oraria $s(t)$ si può ricavare con i metodi già visti per la pianificazione di traiettorie per i robot manipolatori

CONTROLLO DEL MOTO



- I problemi di controllo del moto sono i due classici
 - ★ inseguimento di traiettoria (sinistra)
 - ★ regolazione di configurazione (destra)
- Il primo è quello più rilevante in pratica
 - ★ permette di gestire la presenza di ostacoli
- Gli ingressi di controllo sono quasi sempre le velocità e non le forze generalizzate
 - ★ disponibilità di anelli di controllo di basso livello già integrati nell'architettura hw/sw del robot
 - ★ uso del modello cinematico per risolvere il problema del controllo del moto

Inseguimento di traiettorie

- Traiettoria desiderata ammissibile

$$\dot{x}_d = v_d \cos \theta_d$$

$$\dot{y}_d = v_d \sin \theta_d$$

$$\dot{\theta}_d = \omega_d$$

- ★ uso degli schemi di pianificazione studiati (uscite piatte)

$$x_d(t), y_d(t)$$

↓

$$\theta_d = \text{Atan2}(\dot{y}_d(t), \dot{x}_d(t)) + k\pi \quad k = 0, 1$$

$$v_d(t) = \pm \sqrt{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}$$

$$\omega_d(t) = \frac{\dot{y}_d(t)\dot{x}_d(t) - \ddot{x}_d(t)\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}$$

- Definizione dell'errore di inseguimento

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z(\theta) \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix}$$

- Considerando il modello cinematico dell'uniciclo, si ottiene la dinamica dell'errore

$$\dot{e}_1 = v_d \cos e_3 - v + e_2 \omega$$

$$\dot{e}_2 = v_d \sin e_3 - e_1 \omega$$

$$\dot{e}_3 = \omega_d - \omega$$

- ★ trasformazione (invertibile) degli ingressi

$$v = v_d \cos e_3 - u_1$$

$$\omega = \omega_d - u_2$$

- ★ dinamica dell'errore

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin e_3 \\ 0 \end{bmatrix} v_d + \begin{bmatrix} 1 & -e_2 \\ 0 & e_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

- ★ primo termine lineare tempo-variante

- ★ secondo e terzo termine non lineari

- Controllo via linearizzazione

- ★ linearizzando attorno all'origine $e = \mathbf{0}$

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

- ★ legge di controllo (in retroazione) lineare nello stato

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_1 e_1 \\ u_2 &= -k_2 e_2 - k_3 e_3 \end{aligned}$$

- ★ sistema a ciclo chiuso

$$\dot{e} = \mathbf{A}(t)e = \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} e$$

- ★ il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda + k_1)(\lambda + k_3) + \omega_d^2(\lambda + k_3) + v_d k_2(\lambda + k_1)$$

- ★ se ω_d e v_d sono costanti il sistema a ciclo chiuso è stabile scegliendo

$$k_1 = k_3 = 2\zeta a \quad k_2 = \frac{a^2 - \omega_d^2}{v_d}$$

infatti

$$p(\lambda) = (\lambda + 2\zeta a)(\lambda^2 + 2\zeta a\lambda + a^2)$$

- ★ e quindi l'origine $e = \mathbf{0}$ è localmente asintoticamente stabile
- ★ si noti come $k_2 \rightarrow \infty$ quando $v_d \rightarrow 0$
 \Downarrow
- ★ traiettorie cartesiane *persistenti*
- ★ gli ingressi di controllo in velocità vanno così ricostruiti

$$v = v_d \cos e_3 - u_1$$

$$\omega = \omega_d - u_2$$

che tendono ai riferimenti quando l'errore tende a zero

- Controllo non lineare
 - ★ dinamica dell'errore di inseguimento

$$\dot{e}_1 = e_2\omega + u_1$$

$$\dot{e}_2 = v_d \sin e_3 - e_1\omega$$

$$\dot{e}_3 = u_2$$

- ★ legge di controllo non lineare

$$u_1 = -k_1(v_d, \omega_d)e_1$$

$$u_2 = -k_2 v_d \frac{\sin e_3}{e_3} e_2 - k_3(v_d, \omega_d)e_3$$

nell'ipotesi che

$$k_1(\cdot, \cdot) > 0, k_3(\cdot, \cdot) > 0 \text{ limitate e con derivate limitate}$$

$$k_2 > 0 \text{ costante}$$

v_d, ω_d limitate e con derivate limitate e non entrambi nulle

- ★ l'errore di inseguimento converge *globalmente* a zero
- Dimostrazione basata sul lemma di Barbalat . . .

- Linearizzazione ingresso–uscita

- ★ nuove uscite: posizione di un punto B lungo l'asse sagittale a distanza $|b| \neq 0$ dal punto di contatto della ruota

$$y_1 = x + b \cos \theta$$

$$y_2 = y + b \sin \theta$$

- ★ dinamica delle uscite

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -b \sin \theta \\ \sin \theta & b \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\theta) \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{T}(\theta)$ invertibile ($\det(\mathbf{T}(\theta)) = b \neq 0$)

- ★ controllo linearizzante

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

- ★ sistema a ciclo chiuso

$$\dot{y}_1 = u_1$$

$$\dot{y}_2 = u_2$$

$$\dot{\theta} = \frac{u_2 \cos \theta - u_1 \sin \theta}{b} \text{ rimane non controllata}$$

- ★ legge di controllo lineare per portare l'errore a zero

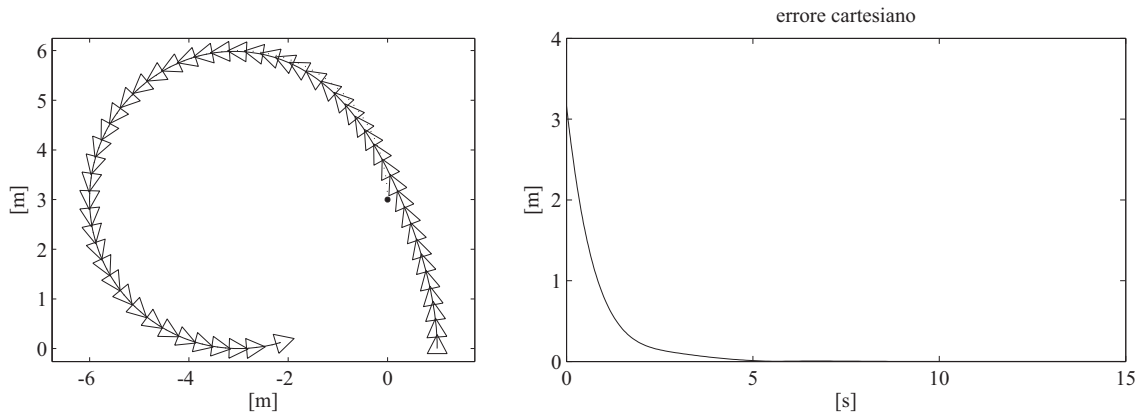
$$u_1 = \dot{y}_{1d} + k_1(y_{1d} - y_1)$$

$$u_2 = \dot{y}_{2d} + k_2(y_{2d} - y_2)$$

- Simulazione: traiettoria circolare e controllo via linearizzazione

$$x_d(t) = x_c + R \cos(\omega_d t)$$

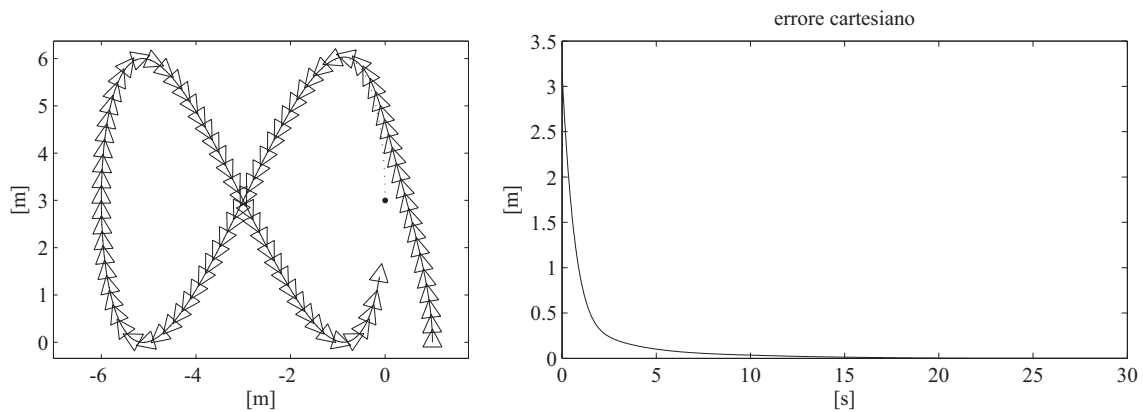
$$y_d(t) = y_c + R \sin(\omega_d t)$$



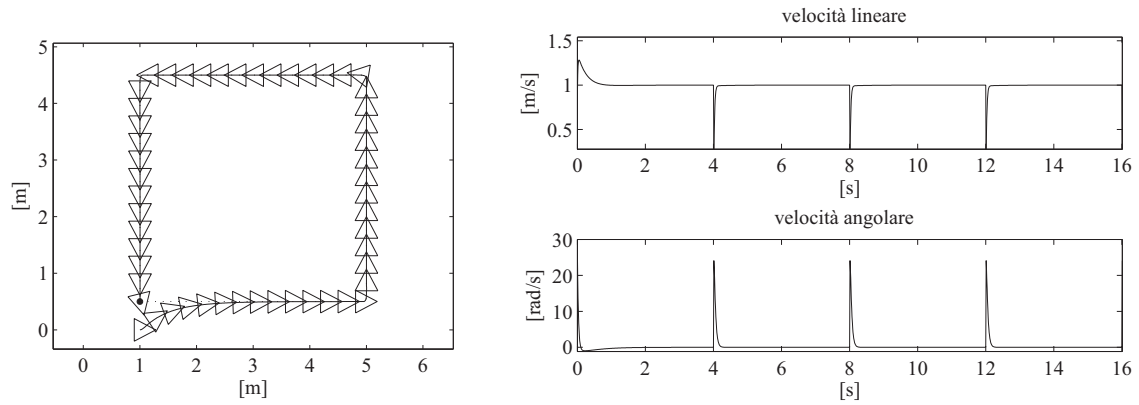
- Simulazione: traiettoria a otto e controllo non lineare

$$x_d(t) = x_c + R_1 \sin(2\omega_d t)$$

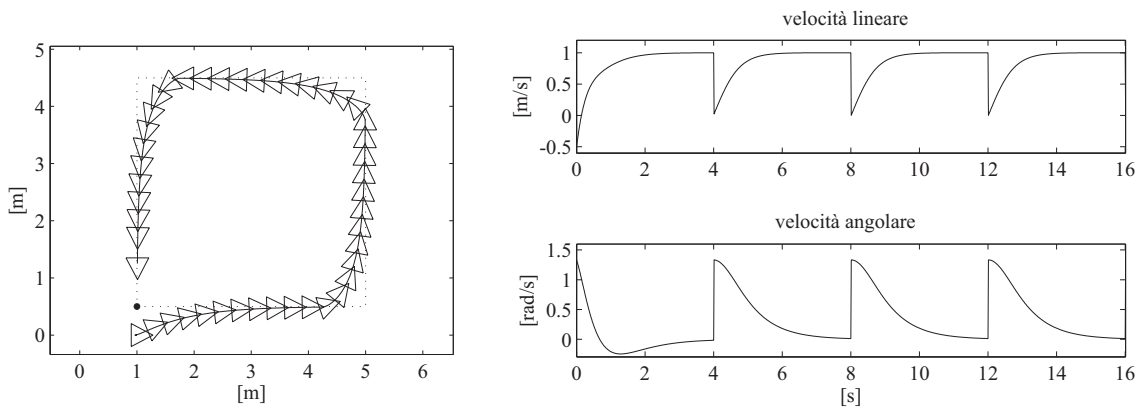
$$y_d(t) = y_c + R_2 \sin(\omega_d t)$$



- Simulazione: traiettoria quadrata e controllo con linearizzazione ingresso-uscita ($b = 0.2$)



- Simulazione: traiettoria quadrata e controllo con linearizzazione ingresso-uscita ($b = 0.75$)



Regolazione

- Porta l'uniciclo alla configurazione desiderata q_d
- L'approccio ovvio (scegli un cammino/traiettoria che si arresta in q_d , quindi inseguì via feedback) non funziona
 - ★ la linearizzazione I/O via feedback statico porta il punto B a destinazione piuttosto che il punto rappresentativo dell'uniciclo
- Essendo anolonomi, i robot mobili su ruote (a differenza dei robot manipolatori) non ammettono controllori universali, ovvero controllori che possano stabilizzare traiettorie arbitrarie, che siano persistenti o meno
- Qualsiasi legge di controllo che possa regolare la postura dell'uniciclo deve essere necessariamente *discontinua rispetto allo stato o tempo-variante*

Regolazione cartesiana

★ Guida l'uniciclo a una posizione cartesiana assegnata (fissata a zero) con qualsiasi orientamento

- Legge di controllo

$$v = -k_1(x \cos \theta + y \sin \theta)$$
$$\omega = k_2(\text{Atan2}(y, x) - \theta + \pi)$$

con $k_1, k_2 > 0$

★ v è proporzionale alla proiezione dell'errore cartesiano e_p sull'asse sagittale

★ ω è proporzionale all'errore di puntamento (differenza tra l'orientamento dell'uniciclo e quella di e_p)

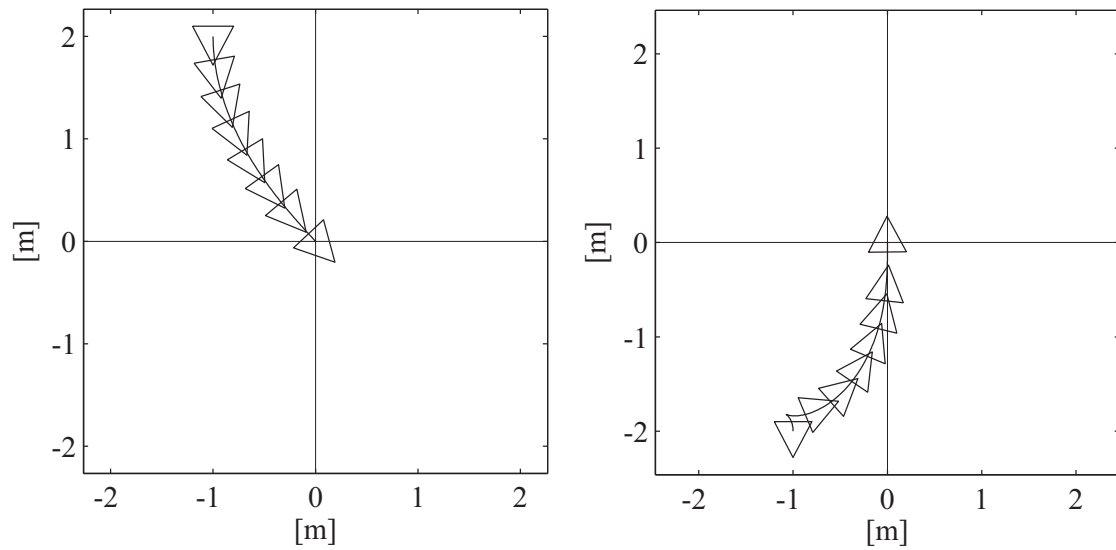
★ Funzione Lyapunov-like

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$\dot{V} = -k_1(x \cos \theta + y \sin \theta)^2$$

- ★ non si può usare il teorema di La Salle, ma il lemma di Barbalat implica che \dot{V} tende a zero
- ★ ciò implica che l'errore cartesiano e_p tende a zero

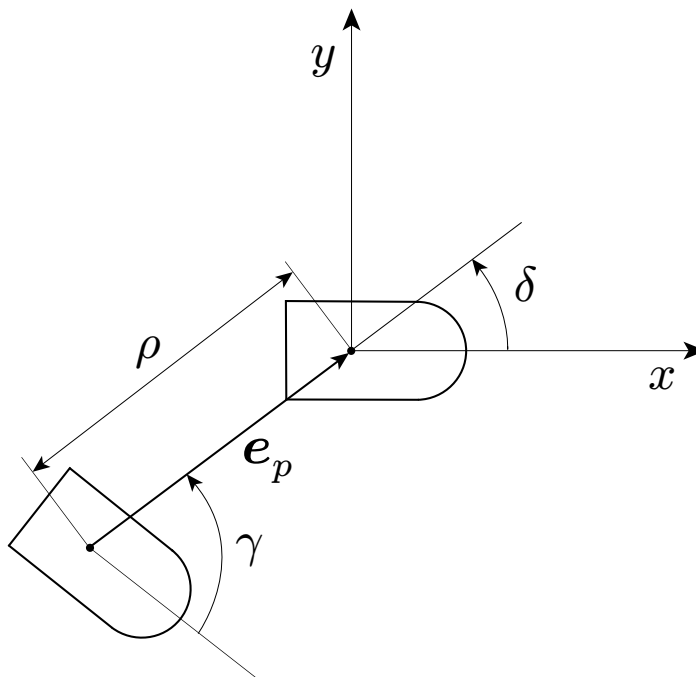
- Simulazione



- ★ l'orientamento finale non è controllato
- ★ è possibile provare che l'uniciclo raggiunge sempre la destinazione a marcia avanti, dopo aver invertito il moto almeno una volta

- Regolazione di postura

- ★ guida l'uniciclo a una configurazione assegnata q_d (fissata a zero)
- ★ coordinate polari



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\gamma = \text{Atan2}(y, x) - \theta + \pi$$

$$\delta = \gamma + \theta$$

- ★ modello cinematico in coordinate polari

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -v \cos \gamma \\ \dot{\gamma} &= \frac{\sin \gamma}{\rho} v - \omega \\ \dot{\delta} &= \frac{\sin \gamma}{\rho} v\end{aligned}$$

singularità all'origine!

- ★ legge di controllo (da paragonare con la precedente)

$$\begin{aligned}v &= k_1 \rho \cos \gamma \\ \omega &= k_2 \gamma + k_1 \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{\gamma} (\gamma + k_3 \delta)\end{aligned}$$

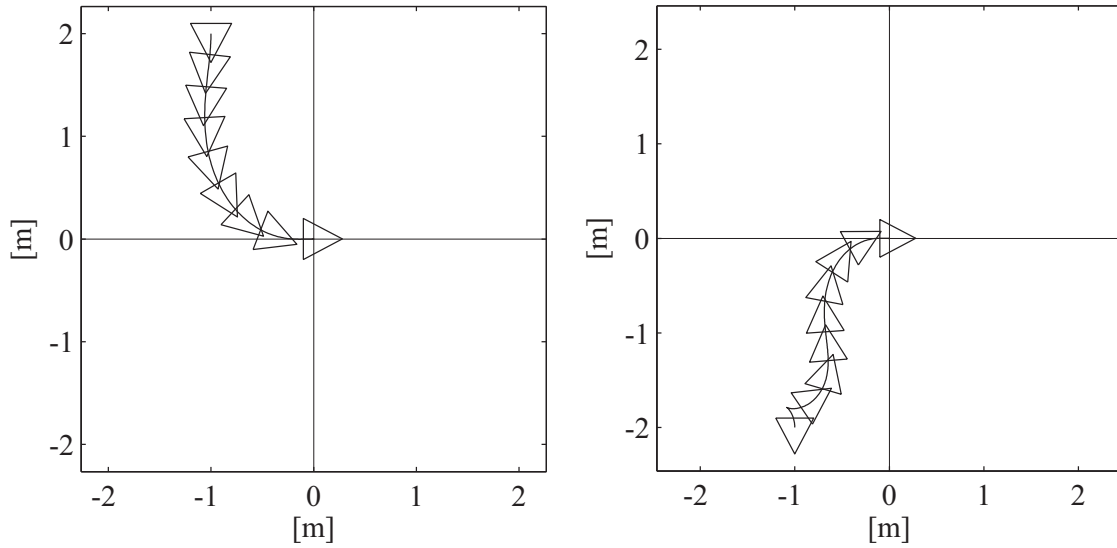
- ★ funzione candidata di Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (\rho^2 + \gamma^2 + k_3 \delta^2)$$

$$\dot{V} = -k_1 \cos^2 \gamma \rho^2 - k_2 \gamma^2$$

- ★ il lemma di Barbalat implica che ρ, γ, δ vadano a zero
- ★ la legge di controllo è discontinua nell'origine: a causa dell'anolonomia, tutti gli stabilizzatori di postura devono essere necessariamente discontinui nello stato o temporari

- Simulazione



- ★ l'orientamento finale è azzerato
- ★ come prima, è possibile provare che l'uniciclo raggiunge sempre la destinazione a marcia avanti, dopo aver invertito il moto almeno una volta

LOCALIZZAZIONE ODOMETRICA

- Gli algoritmi di controllo del moto richiedono la misura della configurazione del robot mobile (posizione e orientamento in un sistema di riferimento fisso)
 - ★ gli encoder montati sulle ruote forniscono solo la rotazione di queste ultime
 - ★ occorre un sistema di stima della posizione assoluta del robot mobile (*localizzazione*)
- Localizzazione passiva (*dead reckoning*)
 - ★ si integra numericamente il modello cinematico assumendo che le velocità siano costanti nell'intervallo di campionamento metodo di Eulero in avanti

$$x_{k+1} = x_k + v_k T_s \cos \theta_k$$

$$y_{k+1} = y_k + v_k T_s \sin \theta_k$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k T_s$$

metodo di Runge-Kutta

$$x_{k+1} = x_k + v_k T_s \cos \left(\theta_k + \frac{\omega_k T_s}{2} \right)$$

$$y_{k+1} = y_k + v_k T_s \sin \left(\theta_k + \frac{\omega_k T_s}{2} \right)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k T_s$$

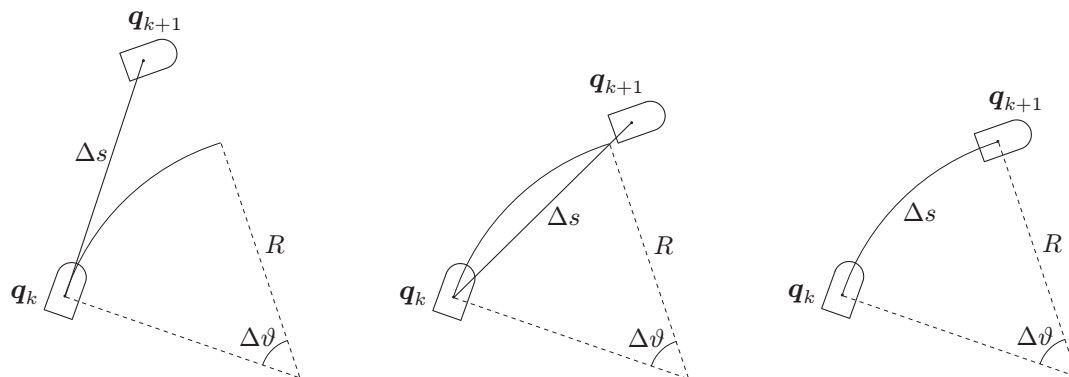
- È bene non usare gli ingressi di riferimento ma usare misure da sensori propriocettivi

$$v_k T_s = \Delta s \quad \omega_k T_s = \Delta \theta$$

- ★ per un veicolo a trazione differenziale

$$\Delta s = \frac{r}{2}(\Delta \phi_R + \Delta \phi_L) \quad \Delta \theta = \frac{r}{d}(\Delta \phi_R - \Delta \phi_L)$$

- ★ è necessario conoscere la configurazione iniziale
- ★ fenomeno della deriva per errori numerici di integrazione
- ★ slittamento delle ruote, raggi delle ruote non noti perfettamente



- Localizzazione attiva
 - ★ uso di sensori esteroceettivi per la correzione della stima ottenuta tramite la localizzazione odometrica
 - ★ tecniche di fusione sensoriale (stima Bayesiana)