

PIANIFICAZIONE DI TRAIETTORIE

- generazione degli ingressi di riferimento per il sistema di controllo del moto

Percorso e traiettoria

Traiettorie nello spazio dei giunti

Traiettorie nello spazio operativo

PERCORSO E TRAIETTORIA

- ★ generazione di traiettorie a curvatura regolare
- Percorso: luogo dei punti dello spazio dei giunti (spazio operativo) che il manipolatore deve descrivere nell'esecuzione del movimento assegnato (descrizione geometrica)
- Traiettoria: percorso su cui sia specificata la legge oraria di moto (ad es. velocità e/o accelerazioni)
- Algoritmo di *pianificazione della traiettoria*
 - ★ ingressi
 - definizione del percorso
 - vincoli al percorso
 - vincoli dovuti alla dinamica del manipolatore
 - ★ uscita
 - traiettorie dei giunti (o dell'organo terminale) espresse come sequenza temporale di valori assunti da posizione, velocità e accelerazione

- Numero ristretto di parametri
 - ★ percorso
 - punti estremi
 - eventuali punti intermedi
 - primitive geometriche
 - ★ legge di moto
 - tempo complessivo
 - velocità e/o accelerazione max
 - velocità e/o accelerazione in punti assegnati
- Traiettorie nello spazio operativo
 - ★ descrizione naturale del compito
 - ★ vincoli sul percorso
 - ★ singolarità
 - ★ ridondanza
- Traiettorie nello spazio dei giunti
 - ★ inversione cinematica
 - ★ azione di controllo

TRAIETTORIE NELLO SPAZIO DEI GIUNTI

- Generazione di una funzione $q(t)$ che interpola i valori assegnati per le variabili di giunto nel rispetto dei vincoli imposti
 - ★ traiettorie generate poco onerose dal punto di vista computazionale
 - ★ posizioni e velocità (e accelerazioni) dei giunti funzioni continue del tempo
 - ★ effetti indesiderati minimizzati (per es. traiettorie a curvatura non regolare)

- *Moto punto–punto*
 - ★ punti estremi e tempo di transizione

- *Moto attraverso una sequenza di punti*
 - ★ punti estremi, punti intermedi e tempi di transizione

Moto punto–punto

★ generazione di $q(t)$ che realizza il moto da q_i a q_f in un tempo t_f

- Polinomio cubico

$$q(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

$$\dot{q}(t) = 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1$$

$$\ddot{q}(t) = 6a_3t + 2a_2$$

★ calcolo dei coefficienti

$$a_0 = q_i$$

$$a_1 = \dot{q}_i$$

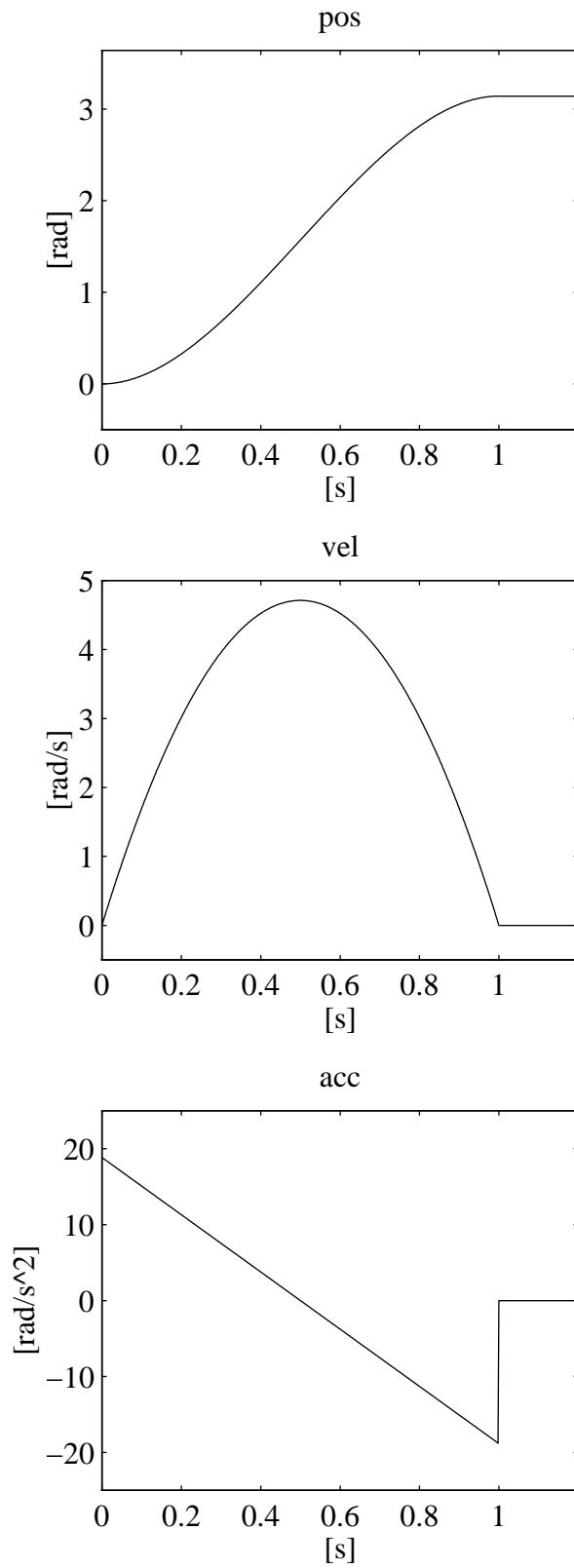
$$a_3t_f^3 + a_2t_f^2 + a_1t_f + a_0 = q_f$$

$$3a_3t_f^2 + 2a_2t_f + a_1 = \dot{q}_f$$

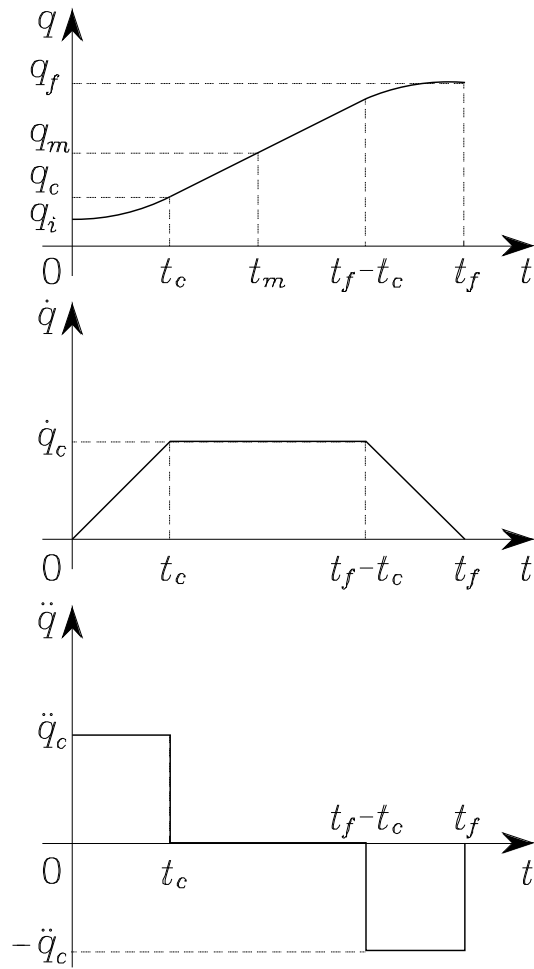
- Polinomio quintico (accelerazioni iniziale e finale)

$$q(t) = a_5t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

- Esempio



- Profilo di velocità trapezoidale



$$\ddot{q}_c t_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c}$$

$$q_c = q_i + \frac{1}{2} \ddot{q}_c t_c^2$$

$$\ddot{q}_c t_c^2 - \ddot{q}_c t_f t_c + q_f - q_i = 0$$

- \ddot{q}_c assegnata ($\text{sgn } \ddot{q}_c = \text{sgn}(q_f - q_i)$)

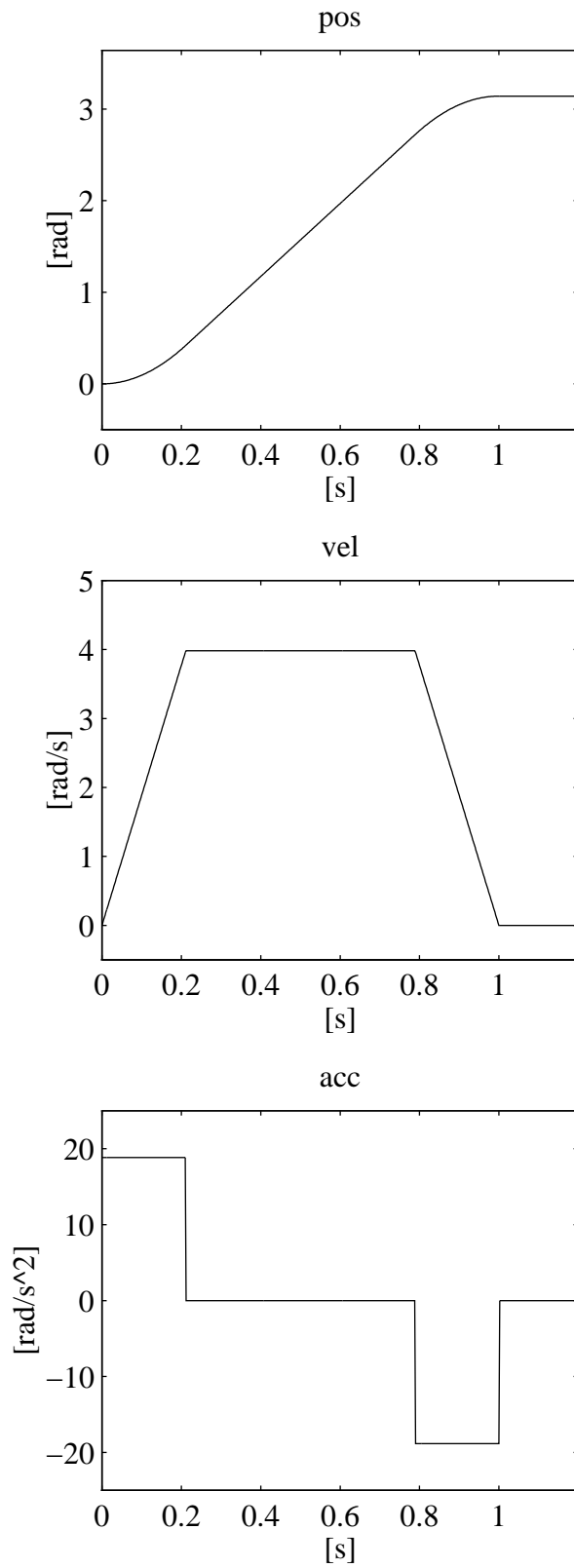
$$t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t_f^2 \ddot{q}_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot{q}_c}}$$

$$|\ddot{q}_c| \geq \frac{4|q_f - q_i|}{t_f^2}$$

★ traiettoria

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2} \ddot{q}_c t^2 & 0 \leq t \leq t_c \\ q_i + \ddot{q}_c t_c (t - t_c/2) & t_c < t \leq t_f - t_c \\ q_f - \frac{1}{2} \ddot{q}_c (t_f - t)^2 & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

- Esempio



- \dot{q}_c assegnata

$$\frac{|q_f - q_i|}{t_f} < |\dot{q}_c| \leq \frac{2|q_f - q_i|}{t_f}$$

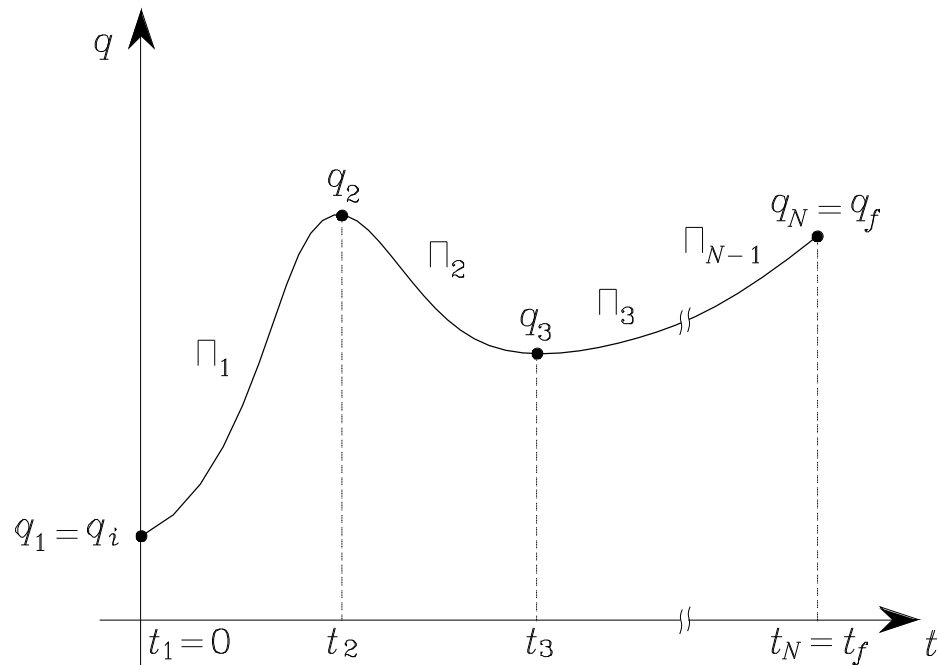
$$t_c = \frac{q_i - q_f + \dot{q}_c t_f}{\dot{q}_c}$$

$$\ddot{q}_c = \frac{\dot{q}_c^2}{q_i - q_f + \dot{q}_c t_f}$$

Moto attraverso una sequenza di punti

- ★ opportunità di specificare punti intermedi (*sequenza di punti*)
- Assegnati N punti di percorso, trovare una funzione interpolante che passi per tali punti
 - ★ polinomio di grado $N - 1$
 - non è possibile assegnare velocità iniziale e finale
 - al crescere del grado di un polinomio aumenta il suo carattere oscillatorio (traiettorie poco naturali)
 - l'accuratezza numerica con cui può essere calcolato un polinomio peggiora all'aumentare del suo grado
 - una volta impostato il sistema di equazioni dei vincoli, risulta oneroso risolverlo
 - i coefficienti del polinomio dipendono da tutti i punti assegnati \implies se si vuole cambiare uno dei punti di percorso, si deve ricalcolare il tutto

- Sequenze di *polinomi interpolatori* di grado più basso (cubici) uniti tra di loro nei punti assegnati lungo il percorso



- ★ i valori di $\dot{q}(t)$ in corrispondenza dei punti di percorso sono imposti arbitrariamente
 - ★ i valori di $\dot{q}(t)$ in corrispondenza dei punti di percorso sono assegnati in base ad un opportuno criterio
 - ★ l'accelerazione $\ddot{q}(t)$ deve essere continua in corrispondenza dei punti di percorso
- Sequenze di polinomi di grado minore di tre (passaggio in prossimità dei punti di percorso imposti)

- Sequenza di polinomi con vincoli imposti sulle velocità nei punti di percorso

$$II_k(t_k) = q_k$$

$$II_k(t_{k+1}) = q_{k+1}$$

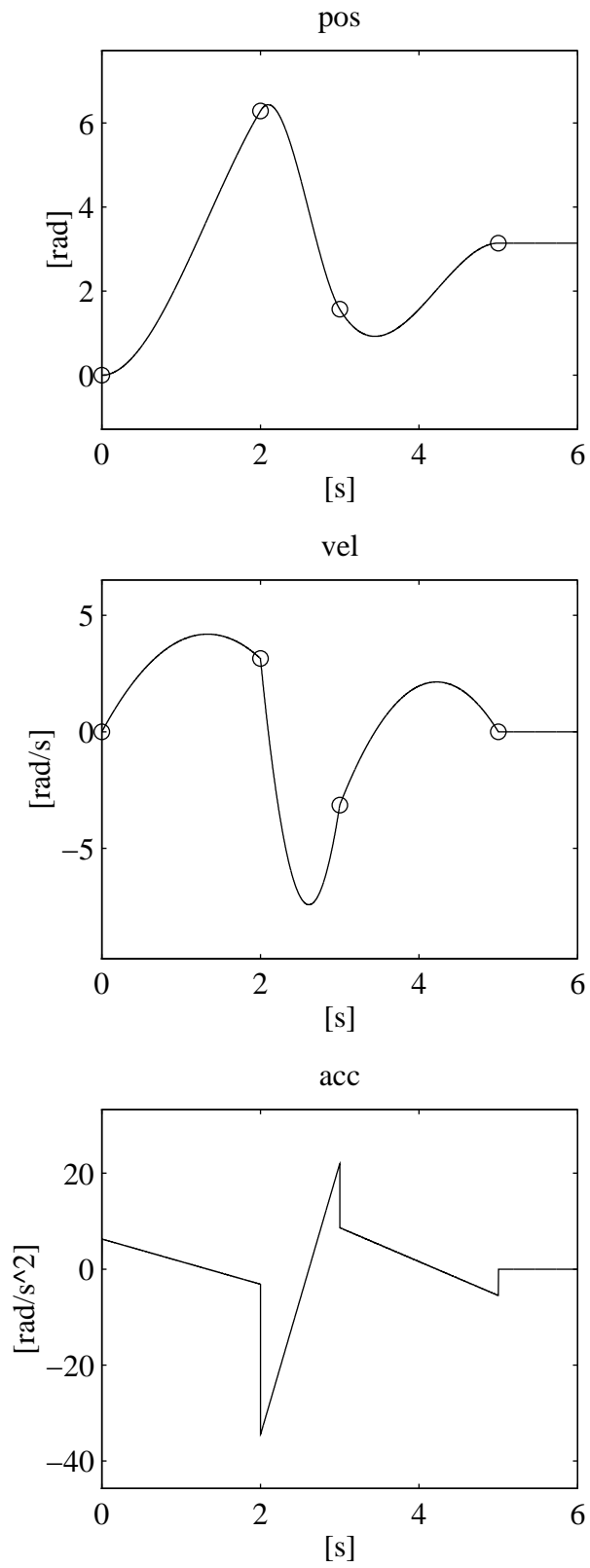
$$\dot{II}_k(t_k) = \dot{q}_k$$

$$\dot{II}_k(t_{k+1}) = \dot{q}_{k+1}$$

- ★ continuità delle velocità nei punti intermedi

$$\dot{II}_k(t_{k+1}) = \dot{II}_{k+1}(t_{k+1})$$

- Esempio

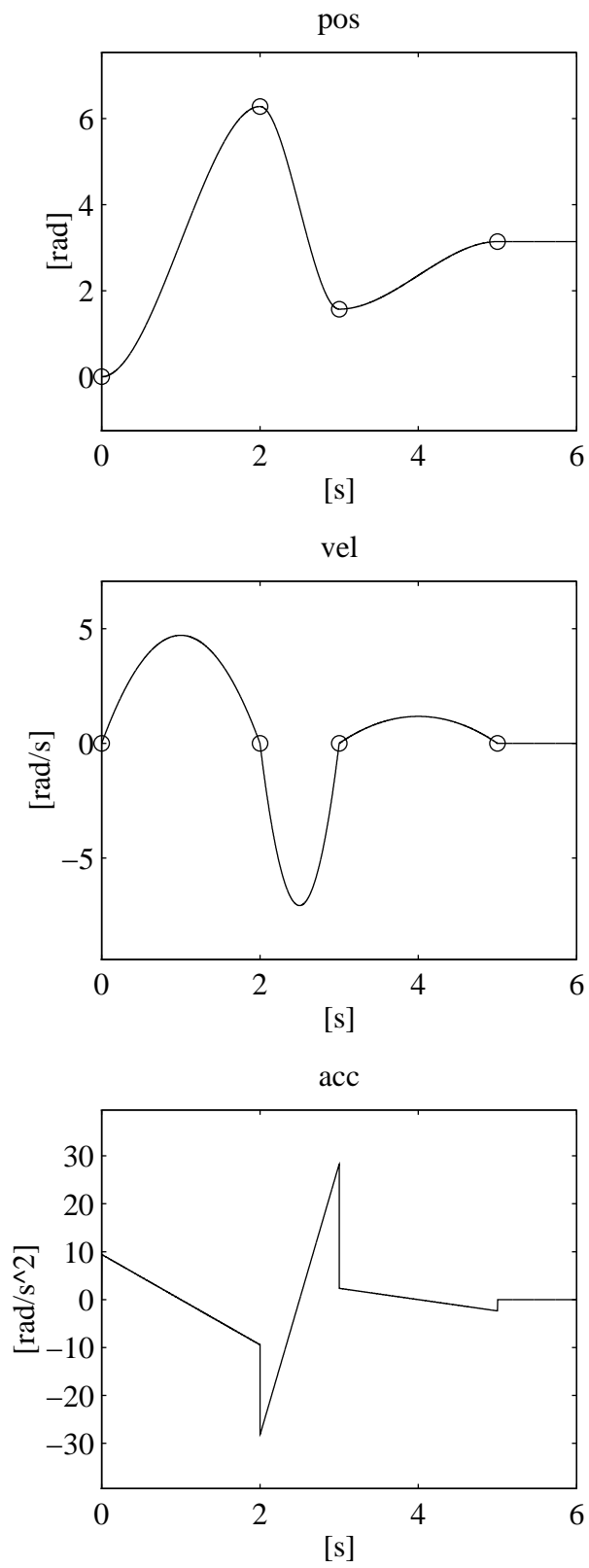


- Sequenza di polinomi con velocità calcolate nei punti di percorso

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= 0 \\ \dot{q}_k &= \begin{cases} 0 & \text{sgn}(v_k) \neq \text{sgn}(v_{k+1}) \\ \frac{1}{2}(v_k + v_{k+1}) & \text{sgn}(v_k) = \text{sgn}(v_{k+1}) \end{cases} \\ \dot{q}_N &= 0\end{aligned}$$

$$v_k = (q_k - q_{k-1}) / (t_k - t_{k-1})$$

- Esempio



- Sequenza di polinomi con accelerazione continua nei punti di percorso (spline)

$$\Pi_{k-1}(t_k) = q_k$$

$$\Pi_{k-1}(t_k) = \Pi_k(t_k)$$

$$\dot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \dot{\Pi}_k(t_k)$$

$$\ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k)$$

- ★ $4N - 2$ equazioni nei $4(N - 1)$ coefficienti incogniti (polinomi di quarto grado per il primo e l'ultimo segmento?)
- ★ 2 *punti virtuali* (continuità su posizione, velocità e accelerazione) $\implies N + 1$ polinomi cubici

★ $4(N - 2)$ equazioni per gli $N - 2$ punti di percorso interni

$$\Pi_{k-1}(t_k) = q_k$$

$$\Pi_{k-1}(t_k) = \Pi_k(t_k)$$

$$\dot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \dot{\Pi}_k(t_k)$$

$$\ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k)$$

★ 6 equazioni per i punti iniziale e finale

$$\Pi_1(t_1) = q_i$$

$$\dot{\Pi}_1(t_1) = \dot{q}_i$$

$$\ddot{\Pi}_1(t_1) = \ddot{q}_i$$

$$\Pi_{N+1}(t_{N+2}) = q_f$$

$$\dot{\Pi}_{N+1}(t_{N+2}) = \dot{q}_f$$

$$\ddot{\Pi}_{N+1}(t_{N+2}) = \ddot{q}_f$$

★ 6 equazioni per i punti virtuali

$$\Pi_{k-1}(t_k) = \Pi_k(t_k)$$

$$\dot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \dot{\Pi}_k(t_k)$$

$$\ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k)$$

⇓

★ Sistema di $4(N + 1)$ equazioni per la determinazione dei $4(N + 1)$ coefficienti degli $N + 1$ polinomi cubici

★ algoritmo efficiente dal punto di vista computazionale

$$\ddot{\Pi}_k(t) = \frac{\ddot{\Pi}_k(t_k)}{\Delta t_k} (t_{k+1} - t) + \frac{\ddot{\Pi}_k(t_{k+1})}{\Delta t_k} (t - t_k)$$

$$\begin{aligned} \Pi_k(t) &= \frac{\ddot{\Pi}_k(t_k)}{6\Delta t_k} (t_{k+1} - t)^3 + \frac{\ddot{\Pi}_k(t_{k+1})}{6\Delta t_k} (t - t_k)^3 \\ &\quad + \left(\frac{\Pi_k(t_{k+1})}{\Delta t_k} - \frac{\Delta t_k \ddot{\Pi}_k(t_{k+1})}{6} \right) (t - t_k) \\ &\quad + \left(\frac{\Pi_k(t_k)}{\Delta t_k} - \frac{\Delta t_k \ddot{\Pi}_k(t_k)}{6} \right) (t_{k+1} - t) \end{aligned}$$

★ 4 incognite: $\Pi_k(t_k)$, $\Pi_k(t_{k+1})$, $\ddot{\Pi}_k(t_k)$ e $\ddot{\Pi}_k(t_{k+1})$

- ★ N variabili q_k per $k \neq 2, N + 1$ assegnate
- ★ vincoli di continuità su q_2 e q_{N+1}
- ★ vincoli di continuità su q_k per $k = 3, \dots, N$
- ★ \dot{q}_i e \dot{q}_f assegnate
- ★ vincoli di continuità su \ddot{q}_k per $k = 2, \dots, N + 1$
- ★ \ddot{q}_i e \ddot{q}_f assegnate

⇓

$$\dot{I}\dot{I}_1(t_2) = \dot{I}\dot{I}_2(t_2)$$

⋮

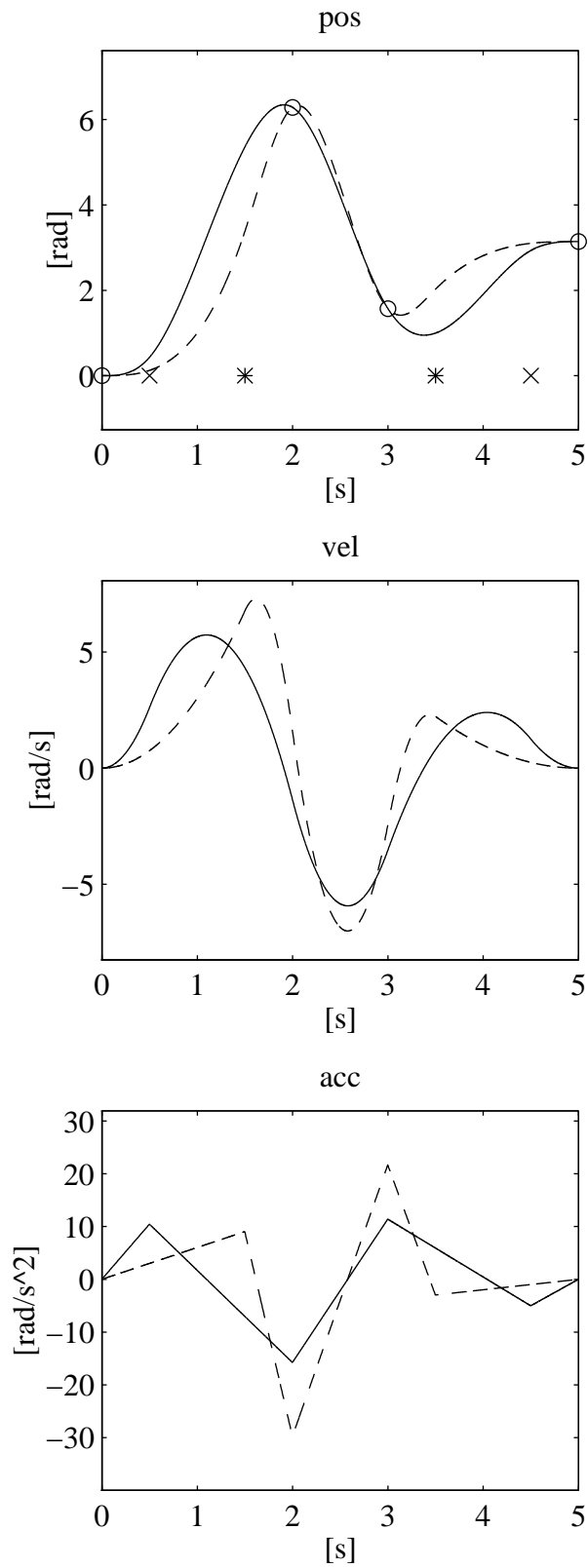
$$\dot{I}\dot{I}_N(t_{N+1}) = \dot{I}\dot{I}_{N+1}(t_{N+1})$$

- ★ sistema di equazioni lineari

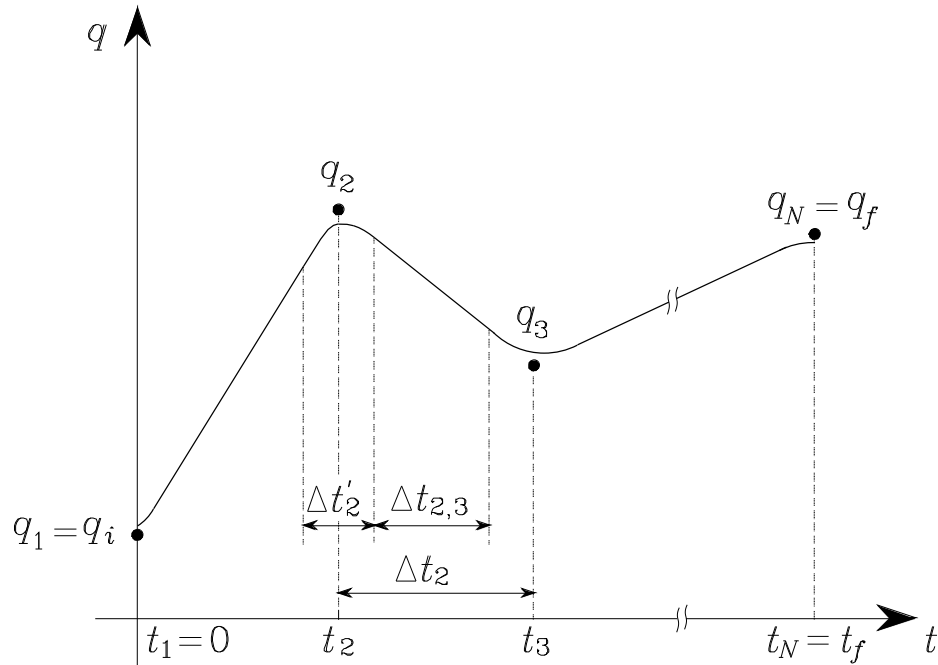
$$\mathbf{A} [\ddot{I}\ddot{I}_2(t_2) \quad \dots \quad \ddot{I}\ddot{I}_{N+1}(t_{N+1})]^T = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & 0 & \dots & a_{N,N-1} & a_{NN} \end{bmatrix}$$

- Esempio



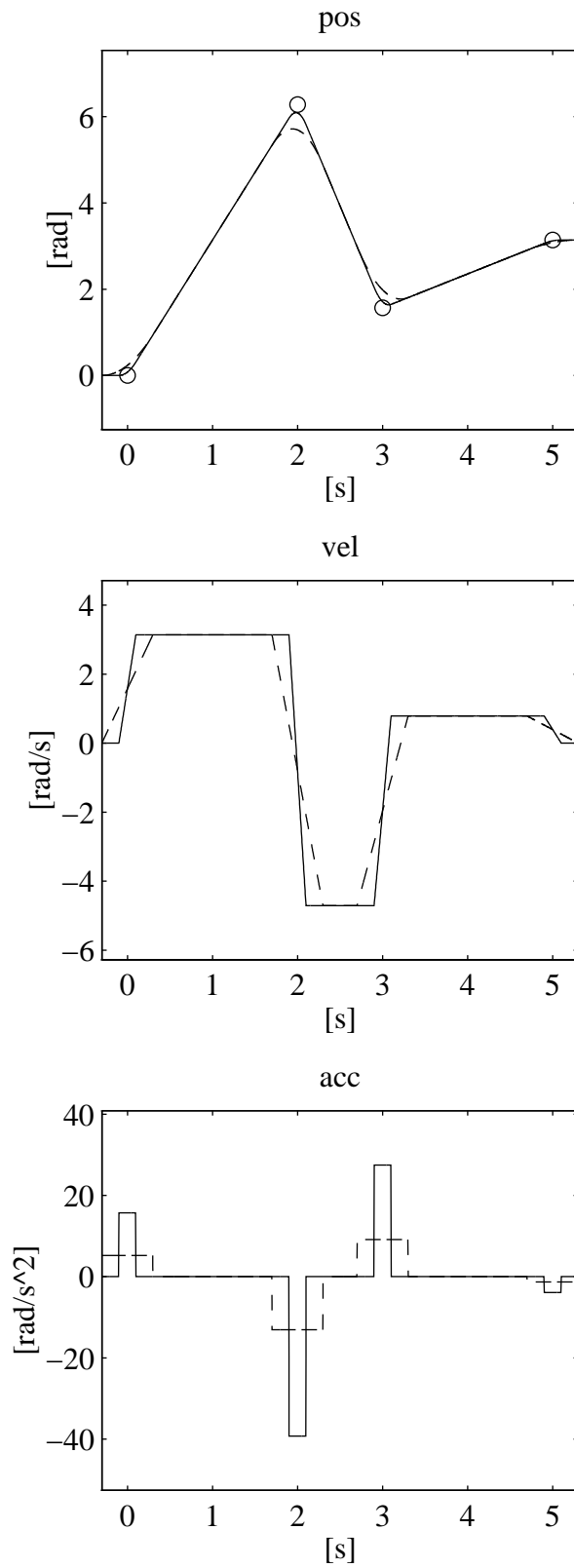
- Sequenza di polinomi parabolico-lineari con passaggio in prossimità di punti di via



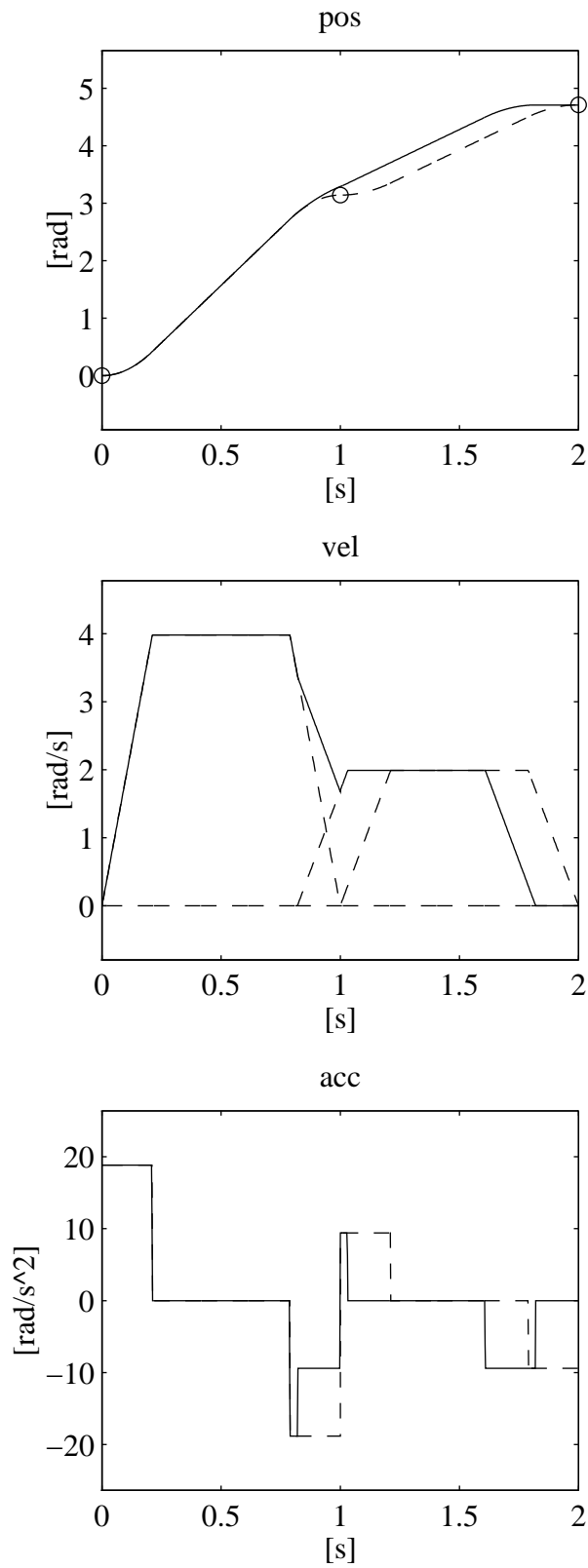
$$\dot{q}_{k-1,k} = \frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t_{k-1}}$$

$$\ddot{q}_k = \frac{\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k}}{\Delta t'_k}$$

- Esempio



- Applicazione della legge trapezoidale al problema dell'interpolazione



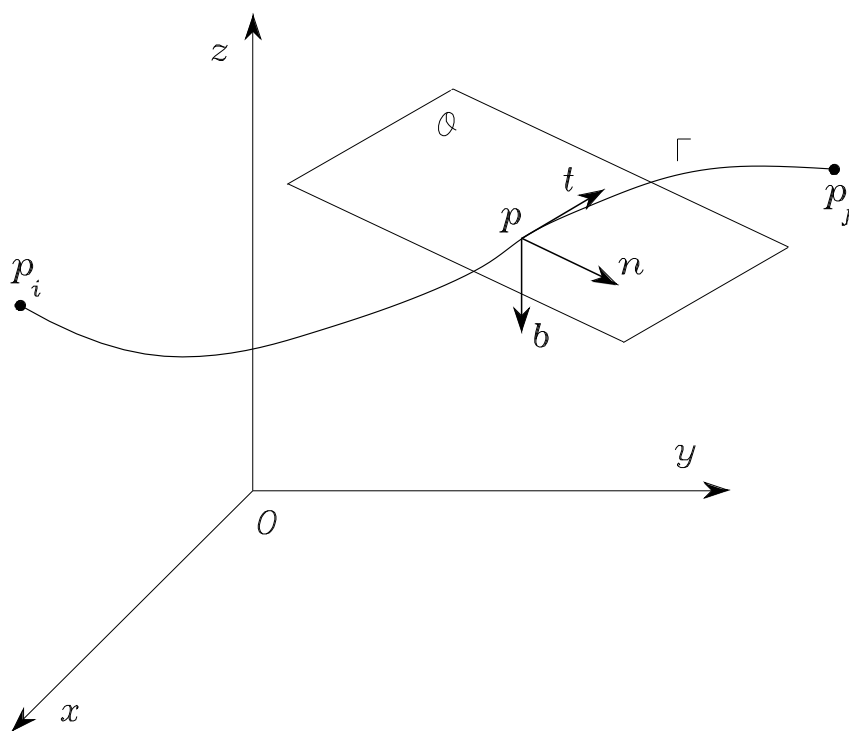
TRAIETTORIE NELLO SPAZIO OPERATIVO

- Sequenze di punti assegnati
 - ★ inversione cinematica
 - ★ traiettorie nello spazio dei giunti
 - ★ microinterpolazione
- Punti di percorso $\boldsymbol{x}(t_k)$
 - ★ componenti $x_i(t_k)$ raccordate secondo sequenze di polinomi interpolatori
- Primitive di percorso
 - ★ espressione analitica del moto

Primitive di percorso

- Rappresentazione parametrica di una curva nello spazio

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(s)$$



$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{p}}{ds}$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\left\| \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} \right\|} \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

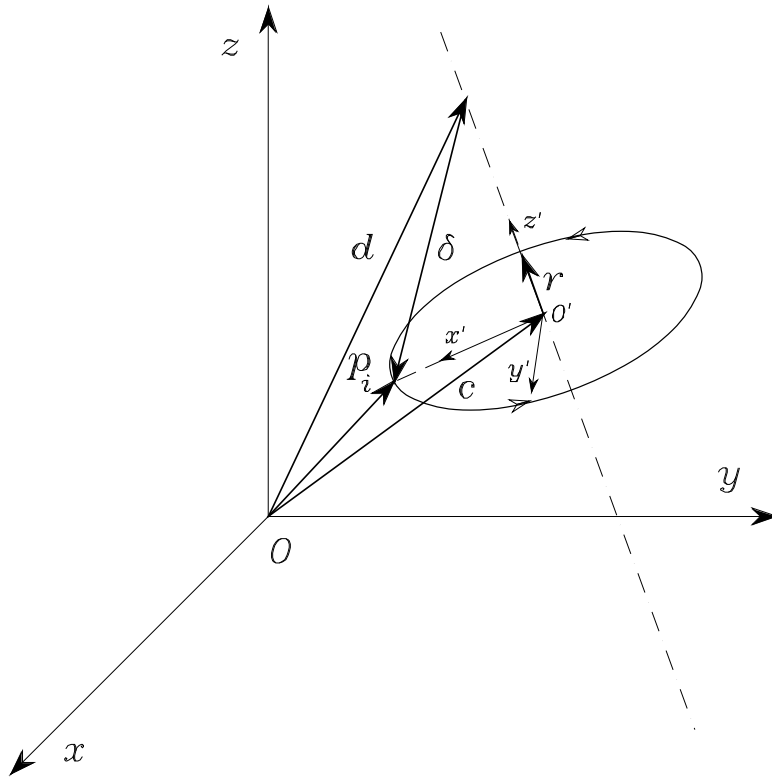
- Segmento nello spazio

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_i + \frac{s}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{1}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)$$

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} = \mathbf{0}$$

- Circonferenza nello spazio



$$\mathbf{p}'(s) = \begin{bmatrix} \rho \cos(s/\rho) \\ \rho \sin(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{c} + \mathbf{R}\mathbf{p}'(s)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\sin(s/\rho) \\ \cos(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\cos(s/\rho)/\rho \\ -\sin(s/\rho)/\rho \\ 0 \end{bmatrix}$$

Traiettorie di posizione e di orientamento

- Posizione $\mathbf{p}_e = \mathbf{f}(s)$

★ $s(t)$ polinomio interpolatore

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \dot{s} \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \dot{s} \mathbf{t}$$

★ segmento

$$\mathbf{p}_e(s) = \mathbf{p}_i + \frac{s}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \frac{\dot{s}}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) = \dot{s} \mathbf{t}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_e = \frac{\ddot{s}}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) = \ddot{s} \mathbf{t}$$

★ circonferenza

$$\mathbf{p}_e(s) = \mathbf{c} + \mathbf{R} \begin{bmatrix} \rho \cos(s/\rho) \\ \rho \sin(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\dot{s} \sin(s/\rho) \\ \dot{s} \cos(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\dot{s}^2 \cos(s/\rho)/\rho - \ddot{s} \sin(s/\rho) \\ -\dot{s}^2 \sin(s/\rho)/\rho + \ddot{s} \cos(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Sequenza di punti

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_0 + \sum_{j=1}^N \frac{s_j}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}\|} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}) \quad j = 1, \dots, N$$

$$s_j(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq t_{j-1} \\ s'_j(t) & t_{j-1} < t < t_j \\ \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}\| & t_j \leq t \leq t_f \end{cases}$$

↓

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \sum_{j=1}^N \frac{\dot{s}_j}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}\|} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}) = \sum_{j=1}^N \dot{s}_j \mathbf{t}_j$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_e = \sum_{j=1}^N \frac{\ddot{s}_j}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}\|} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}) = \sum_{j=1}^N \ddot{s}_j \mathbf{t}_j$$

- Punti di via

$$s_j(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq t_{j-1} - \Delta t_j \\ s'_j(t + \Delta t_j) & t_{j-1} - \Delta t_j < t < t_j - \Delta t_j \\ \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}\| & t_j - \Delta t_j \leq t \leq t_f - \Delta t_N \end{cases}$$

$$\Delta t_j = \Delta t_{j-1} + \delta t_j \quad j = 1, \dots, N \quad \Delta t_0 = 0$$

- Orientamento

- ★ interpolazione delle componenti di $\mathbf{n}_e(t)$, $\mathbf{s}_e(t)$, $\mathbf{a}_e(t)$?

- ★ interpolazione di $\phi_e(t)$

$$\phi_e(s) = \phi_i + \frac{s}{\|\phi_f - \phi_i\|} (\phi_f - \phi_i)$$

$$\dot{\phi}_e = \frac{\dot{s}}{\|\phi_f - \phi_i\|} (\phi_f - \phi_i)$$

$$\ddot{\phi}_e = \frac{\ddot{s}}{\|\phi_f - \phi_i\|} (\phi_f - \phi_i)$$

- ★ asse equivalente di rotazione ($\mathbf{R}_f = \mathbf{R}_i \mathbf{R}_f^i$)

$$\mathbf{R}_f^i = \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\vartheta_f = \cos^{-1} \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right)$$

$$\mathbf{r}^i = \frac{1}{2 \sin \vartheta_f} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^i(t): \quad \mathbf{R}^i(0) = \mathbf{I} \quad \mathbf{R}^i(t_f) = \mathbf{R}_f^i$$

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_i \mathbf{R}_r^i(\vartheta(t))$$

$$\vartheta(0) = 0 \quad \vartheta(t_f) = \vartheta_f$$

$$\boldsymbol{\omega}^i = \dot{\vartheta} \boldsymbol{r}^i$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^i = \ddot{\vartheta} \boldsymbol{r}^i$$

↓

$$\boldsymbol{R}_e(t) = \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{R}^i(t)$$

$$\boldsymbol{\omega}_e(t) = \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{\omega}^i(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_e(t) = \boldsymbol{R}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}^i(t)$$