

# **CONTROLLO DI FORZA**

**Interazione del manipolatore con l'ambiente**

**Controllo di cedevolezza**

**Controllo di impedenza**

**Controllo di forza**

**Moto vincolato**

**Vincoli naturali e vincoli artificiali**

**Controllo ibrido forza/moto**

# INTERAZIONE DEL MANIPOLATORE CON L'AMBIENTE

- Moto vincolato
  
- Controllo posizionale (?)
  - ★ errori di posizionamento
  - ★ incertezza sull'ambiente
  
- Contatto instabile
  
- Misura di forza
  
- Strategie di controllo
  - ★ *indirette*
  - ★ *dirette*

## CONTROLLO DI CEDEVOLEZZA

- Effetti della forza di contatto su schemi di controllo posizionale (nello *spazio operativo*)

$$B(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + F\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_e$$

★ all'equilibrio

$$\mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_e$$

⇓

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_P^{-1}\mathbf{T}_A^T(\mathbf{x})\mathbf{h}_e = \mathbf{K}_P^{-1}\mathbf{h}_A$$

- $\mathbf{K}_P^{-1} \equiv$  *cedevolezza attiva* del controllo
  - ★ lineare nei riguardi di  $\mathbf{f}$
  - ★ torsionale nei riguardi di  $\boldsymbol{\mu}$
- Se  $\mathbf{h}_e \in \mathcal{N}(\mathbf{J}^T) \implies \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad \mathbf{h}_e \neq \mathbf{0}$

## Cedevolezza passiva

- ★ spostamento elementare tra due corpi rigidi  $R$  e  $S$  accoppiati elasticamente (terna di riferimento indifferente)

$$d\mathbf{x}_{r,s} = \begin{bmatrix} d\mathbf{o}_{r,s} \\ \boldsymbol{\omega}_{r,s} dt \end{bmatrix} = \mathbf{v}_{r,s} dt$$

⇓

$$\mathbf{h}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \boldsymbol{\mu}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_f & \mathbf{K}_c \\ \mathbf{K}_c^T & \mathbf{K}_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{o}_{r,s} \\ \boldsymbol{\omega}_{r,s} dt \end{bmatrix} = \mathbf{K} d\mathbf{x}_{r,s} \quad \mathbf{h}_r = -\mathbf{h}_s$$

- Matrice di *rigidezza*  $\mathbf{K}$  (simmetrica e semi-definita positiva)
  - ★  $\mathbf{K}_f \equiv$  rigidezza traslazionale
  - ★  $\mathbf{K}_\mu \equiv$  rigidezza rotazionale
  - ★  $\mathbf{K}_c \equiv$  rigidezza di accoppiamento
- Matrice di *cedevolezza*  $\mathbf{C}$

$$d\mathbf{x}_{r,s} = \mathbf{C} \mathbf{h}_s$$

- ★ Remote Center of Compliance (RCC)

## Cedevolezza attiva

- ★ posizione e orientamento terna utensile rispetto a terna desiderata

$$\mathbf{T}_e^d = (\mathbf{T}_d)^{-1} \mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e^d & \mathbf{o}_{d,e}^d \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_e^d = \mathbf{R}_d^T \mathbf{R}_e \quad \mathbf{o}_{d,e}^d = \mathbf{R}_d^T (\mathbf{o}_e - \mathbf{o}_d)$$

⇓

$$\tilde{\mathbf{x}} = - \begin{bmatrix} \mathbf{o}_{d,e}^d \\ \phi_{d,e} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = -\mathbf{J}_{A_d}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{J}_{A_d}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{T}_A^{-1}(\phi_{d,e}) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_d^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_d^T \end{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{q})$$

- Controllo PD con compensazione di gravità

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_{A_d}^T(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}}) \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{J}_{A_d}^T \mathbf{K}_D \mathbf{J}_{A_d}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{q}}$$

- Analisi di stabilità

$$V = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}} > 0 \quad \forall \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0},$$

- ★ all'equilibrio

$$\mathbf{J}_{A_d}^T(\mathbf{q}) \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_e$$

$$\mathbf{h}_e^d = \mathbf{T}_A^{-T}(\phi_{d,e}) \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}}$$

- ★ in termini di spostamenti elementari

$$d\tilde{\mathbf{x}} = \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{0}} dt = \mathbf{T}_A^{-1}(\mathbf{0})(\mathbf{v}_d^d - \mathbf{v}_e^d) dt = \mathbf{T}_A^{-1}(\mathbf{0}) d\mathbf{x}_{e,d}$$

⇓

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{K}_P d\mathbf{x}_{e,d} \quad d\mathbf{x}_{e,d} = \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{h}_e$$

- Modello dell'ambiente elasticamente cedevole

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{K} d\mathbf{x}_{r,e}$$

$\mathbf{K} \equiv$  rigidezza dell'ambiente

- ★ semi-definita positiva (solo per le direzioni di moto vincolato)

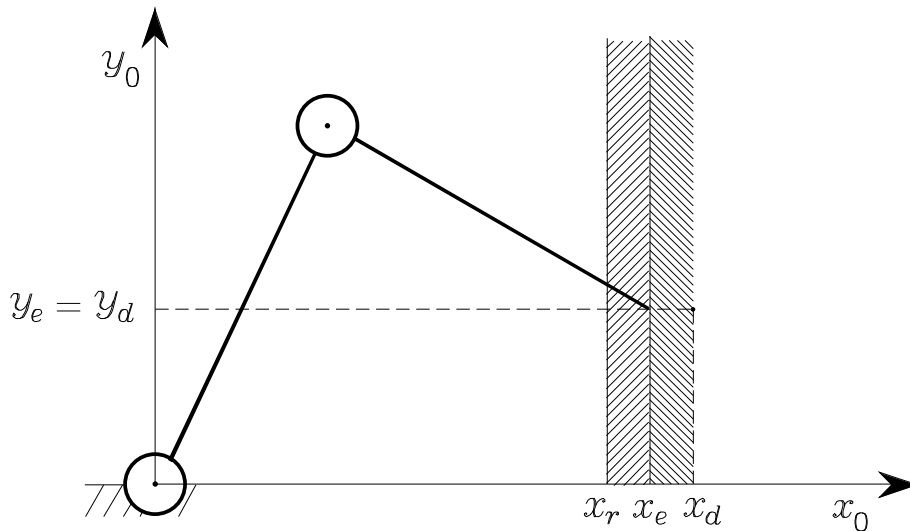
- Cedevolezza *attiva* vs. cedevolezza *passiva* . . . all'equilibrio

$$\mathbf{h}_e = (\mathbf{I}_6 + \mathbf{K} \mathbf{K}_P^{-1})^{-1} \mathbf{K} d\mathbf{x}_{r,d}$$

$$d\mathbf{x}_{e,d} = \mathbf{K}_P^{-1} (\mathbf{I}_6 + \mathbf{K} \mathbf{K}_P^{-1})^{-1} \mathbf{K} d\mathbf{x}_{r,d}$$

- ★ manipolatore  $\pm$  cedevole
- ★ ambiente  $\pm$  cedevole

## Esempio



$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_f = \text{diag}\{k_x, 0\} \quad \mathbf{K}_P = \text{diag}\{k_{Px}, k_{Py}\}$$

- All'equilibrio

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \frac{k_{Px}k_x}{k_{Px} + k_x}(x_d - x_r) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{o}_e = \begin{bmatrix} \frac{k_{Px}x_d + k_x x_r}{k_{Px} + k_x} \\ y_d \end{bmatrix}$$

★ se  $k_{Px}/k_x \gg 1$

$$x_e \approx x_d \quad f_x \approx k_x(x_d - x_r)$$

★ se  $k_{Px}/k_x \ll 1$

$$x_e \approx x_r \quad f_{x\infty} \approx k_{Px}(x_d - x_r)$$



- Cedevolezza attiva nello spazio dei giunti

★ all'equilibrio

$$\mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_e$$

⇓

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_e$$

$$d\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_e$$

## CONTROLLO DI IMPEDENZA

- Controllo a dinamica inversa nello spazio operativo

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

↓

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y} - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_e$$

- ★ scelta del nuovo ingresso di controllo

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{M}_d\ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_D\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{M}_d\dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}})$$

$$\mathbf{M}_d\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_D\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{M}_d\mathbf{B}_A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{h}_A$$

$$\mathbf{B}_A(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_A^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q})$$

- Impedenza meccanica

- ★ massa  $\mathbf{M}_d$

- ★ smorzamento  $\mathbf{K}_D$

- ★ rigidezza  $\mathbf{K}_P$

- Integrazione della *misura* della *forza* di contatto

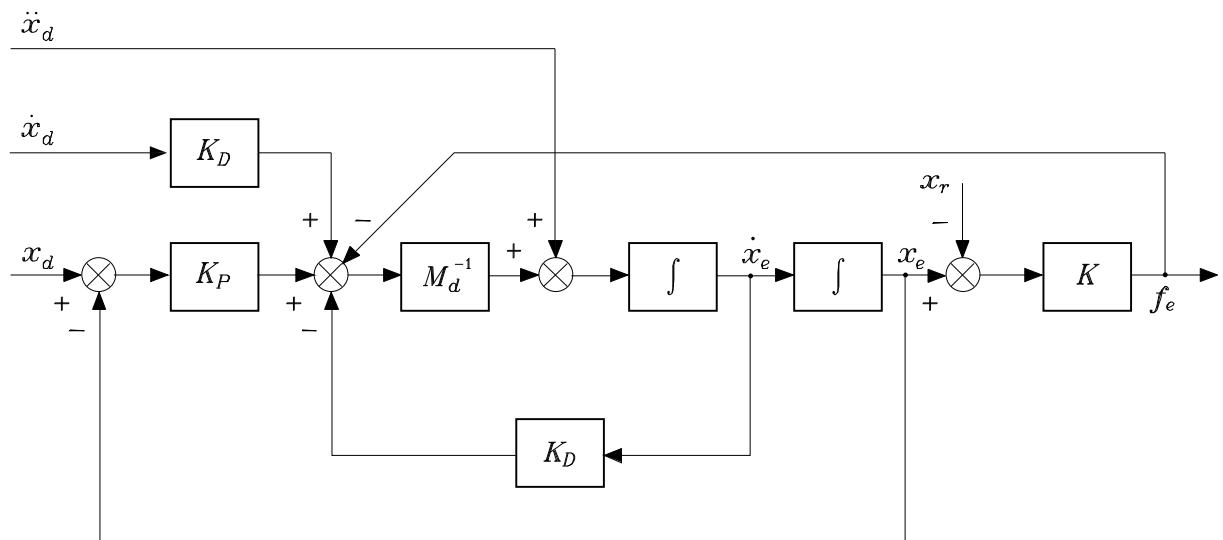
$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_e$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{M}_d\ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_D\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{M}_d\dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}_A)$$

⇓

$$\mathbf{M}_d\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_D\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{h}_A$$

★ impedenza *lineare* attiva



- Per evitare problemi di singularità di rappresentazione . . .

★ terna desiderata tempo-variante

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = -\mathbf{J}_{A_d}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{R}_d, \dot{\mathbf{o}}_d, \boldsymbol{\omega}_d)$$

$$\mathbf{b}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{R}_d, \dot{\mathbf{o}}_d, \boldsymbol{\omega}_d) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_d^T \dot{\mathbf{o}}_d + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_d^d) \mathbf{o}_{d,e}^d \\ \mathbf{T}^{-1}(\boldsymbol{\phi}_{d,e}) \boldsymbol{\omega}_d^d \end{bmatrix}$$

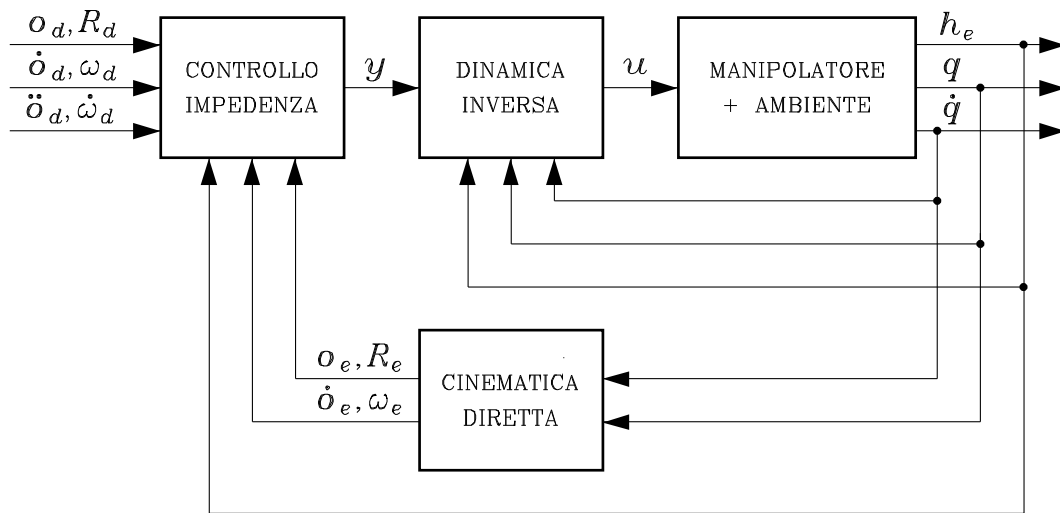
$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} = -\mathbf{J}_{A_d} \ddot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{J}}_{A_d} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{b}}$$

★ nuovo ingresso di controllo

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}_{A_d}^{-1} \mathbf{M}_d^{-1} (\mathbf{K}_D \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_P \dot{\tilde{\mathbf{x}}} - \mathbf{M}_d \dot{\mathbf{J}}_{A_d} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_d \dot{\mathbf{b}} - \mathbf{h}_e^d)$$

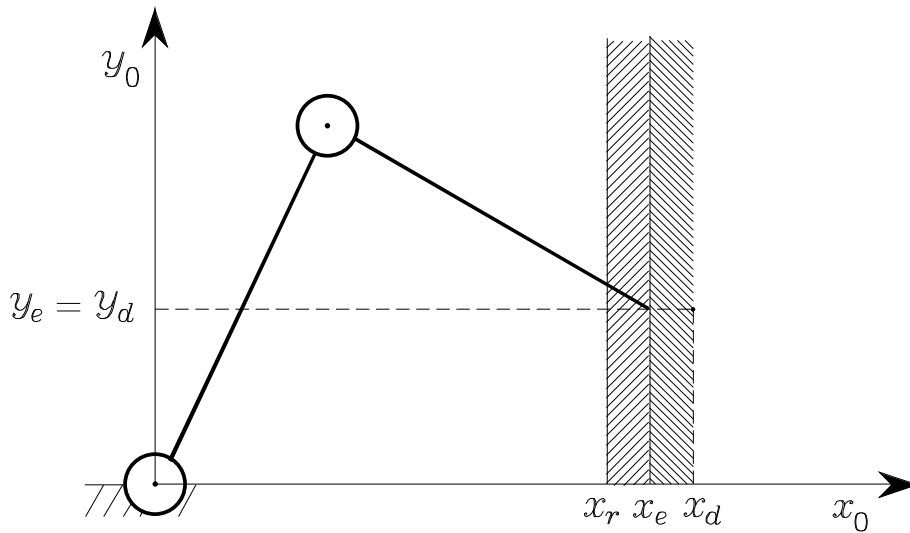
⇓

$$\mathbf{M}_d \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{h}_e^d$$



- Dispositivi meccanici di impedenza passiva

## Esempio



- Controllo di impedenza con misura di forza

$$\mathbf{M}_d = \text{diag}\{m_{dx}, m_{dy}\}$$

$$\mathbf{K}_D = \text{diag}\{k_{Dx}, k_{Dy}\}$$

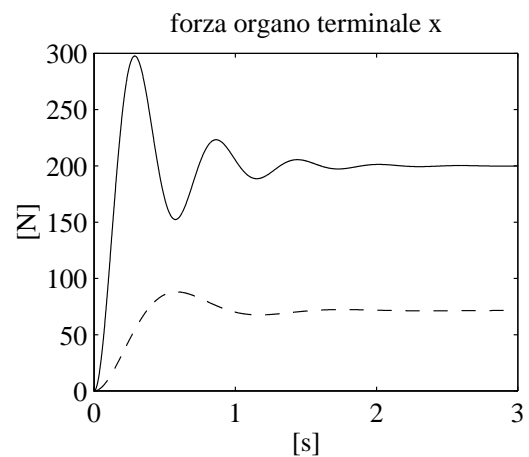
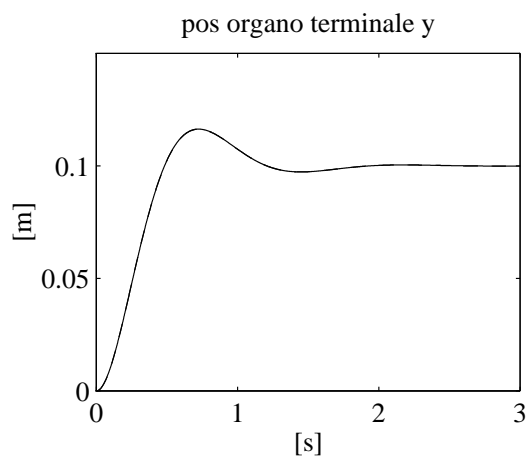
$$\mathbf{K}_P = \text{diag}\{k_{Px}, k_{Py}\}$$

- ★ dinamica del sistema manipolatore–ambiente lungo le due direzioni dello spazio operativo ( $x_d$  costante)

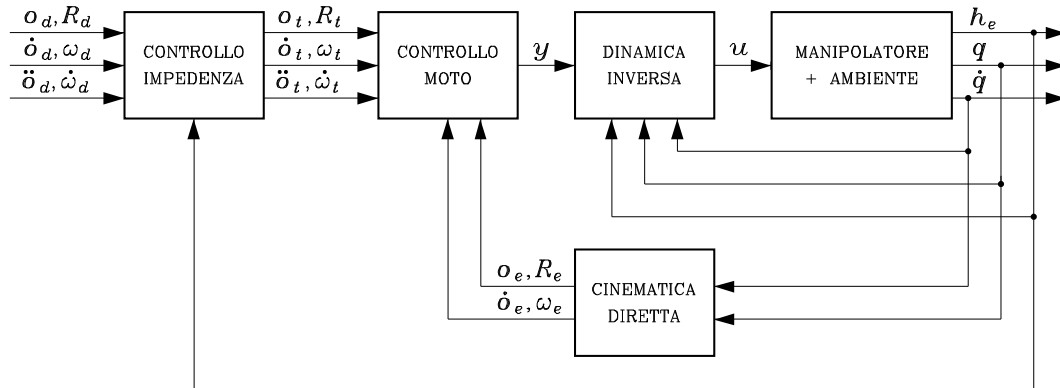
$$m_{dx}\ddot{x}_e + k_{Dx}\dot{x}_e + (k_{Px} + k_x)x_e = k_x x_r + k_{Px}x_d$$

$$m_{dy}\ddot{y}_e + k_{Dy}\dot{y}_e + k_{Py}y_e = k_{Py}y_d$$

- Ambiente ( $x_r = 1$ )
  - ★ più cedevole  $k_x = 10^3$  N/m
  - ★ meno cedevole  $k_x = 10^4$  N/m
- Controllo
  - ★  $m_{dx} = m_{dy} = 100$
  - ★  $k_{Dx} = k_{Dy} = 500$
  - ★  $k_{Px} = k_{Py} = 2500$
- Manipolatore
  - ★  $\mathbf{x}_e = [1 \ 0]^T$
  - ★  $\mathbf{x}_d = [1.1 \ 0.1]^T$



## Controllo di ammettenza



- Impedenza meccanica tra terna desiderata e *terna cedevole t*

$$M_t \ddot{\tilde{z}} + K_{Dt} \dot{\tilde{z}} + K_{Pt} \tilde{z} = h_e^d$$

- ★ comportamento cedevole durante l'interazione con l'ambiente
- ★ buona robustezza dell'anello interno di controllo del moto (maggiore banda passante)



## CONTROLLO DI FORZA

- Controllo di cedevolezza o impedenza  $\implies$  controllo indiretto di forza
- Controllo diretto
  - ★ azione di controllo PD sulla forza (misura corrotta da rumore)
  - ★ chiusura di un *anello esterno di regolazione della forza*  $\implies$  ingresso di riferimento per uno schema di controllo posizionale a dinamica inversa
- Ipotesi: sole variabili di posizione
  - ★ modello di ambiente elastico

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{K}(\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_r)$$

## Controllo di forza con anello interno di posizione

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_e$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{M}_d^{-1}(-\mathbf{K}_D\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_P(\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_e) - \mathbf{M}_d\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}})$$

↓

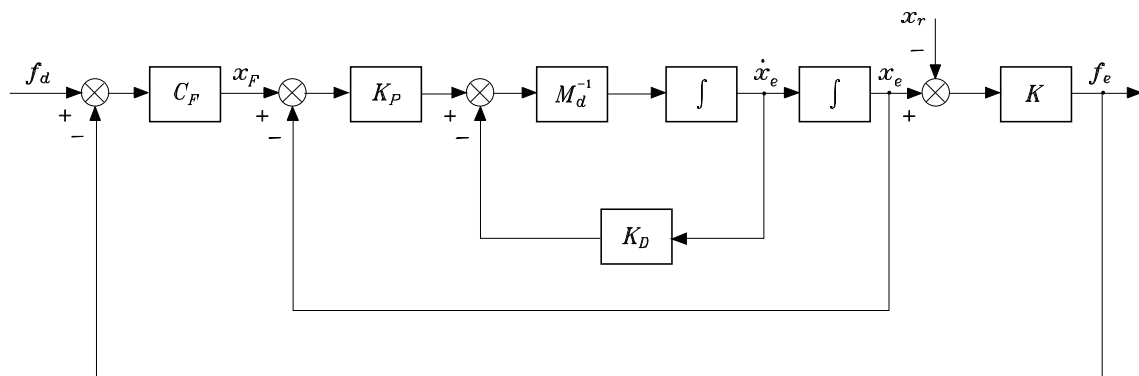
$$\mathbf{M}_d\ddot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_P\mathbf{x}_e = \mathbf{K}_P\mathbf{x}_F$$

- Scelta del controllo

$$\mathbf{x}_F = \mathbf{C}_F(\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_e)$$

↓

$$\mathbf{M}_d\ddot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_P(\mathbf{I}_3 + \mathbf{C}_F\mathbf{K})\mathbf{x}_e = \mathbf{K}_P\mathbf{C}_F(\mathbf{K}\mathbf{x}_r + \mathbf{f}_d)$$



- Azione PI

$$C_F = K_F + K_I \int^t (\cdot) d\varsigma$$

★ scelta di  $K_D, K_P, K_F, K_I \implies$  margini di stabilità  
+ banda passante

- All'equilibrio (stabile)

$$f_e = f_d$$

$$Kx_e = Kx_r + f_d$$

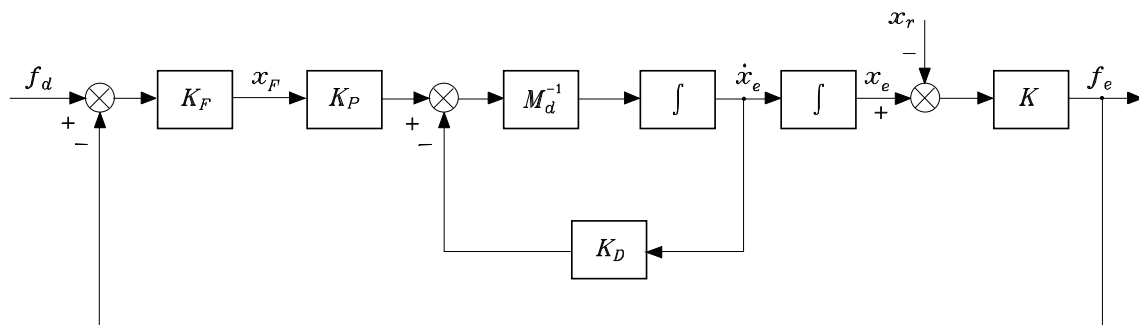
## Controllo di forza con anello interno di velocità

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{M}_d^{-1}(-\mathbf{K}_D\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_P\mathbf{x}_F - \mathbf{M}_d\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}})$$

$$\mathbf{x}_F = \mathbf{K}_F(\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_e)$$

⇓

$$\mathbf{M}_d\ddot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_P\mathbf{K}_F\mathbf{K}\mathbf{x}_e = \mathbf{K}_P\mathbf{K}_F(\mathbf{K}\mathbf{x}_r + \mathbf{f}_d)$$



- All'equilibrio (stabile)

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_d$$

$$\mathbf{K}\mathbf{x}_e = \mathbf{K}\mathbf{x}_r + \mathbf{f}_d$$

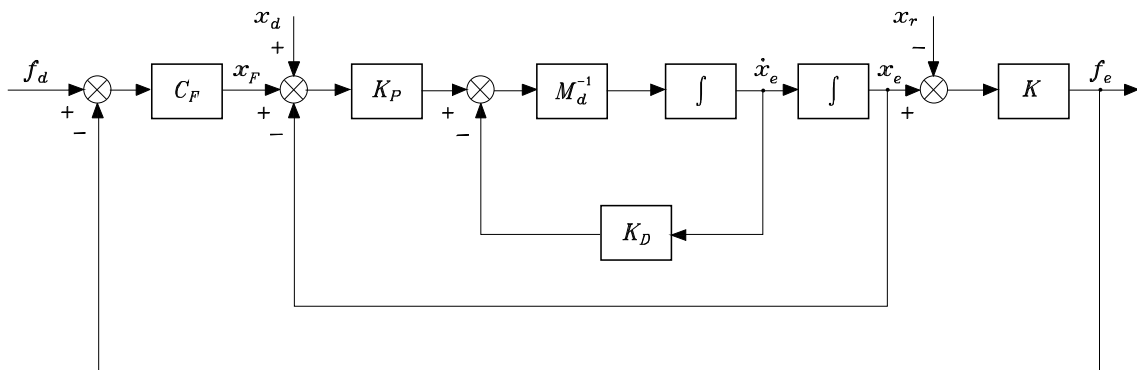
★ attenzione dinamiche non modellate (assenza azione integrale)

## Controllo parallelo forza/posizione

- \* se  $\mathbf{f}_d \notin \mathcal{R}(\mathbf{K}) \implies$  deriva di  $\mathbf{x}_e$
- \* se  $\mathbf{f}_d \in \mathcal{R}(\mathbf{K}) \implies \mathbf{x}_e$  (o  $\dot{\mathbf{x}}_e$ )  $\rightarrow \mathbf{0}$

- Aggiunta di  $\mathbf{x}_d$

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{M}_d^{-1}(-\mathbf{K}_D\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_P(\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_F) - \mathbf{M}_d\dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}})$$

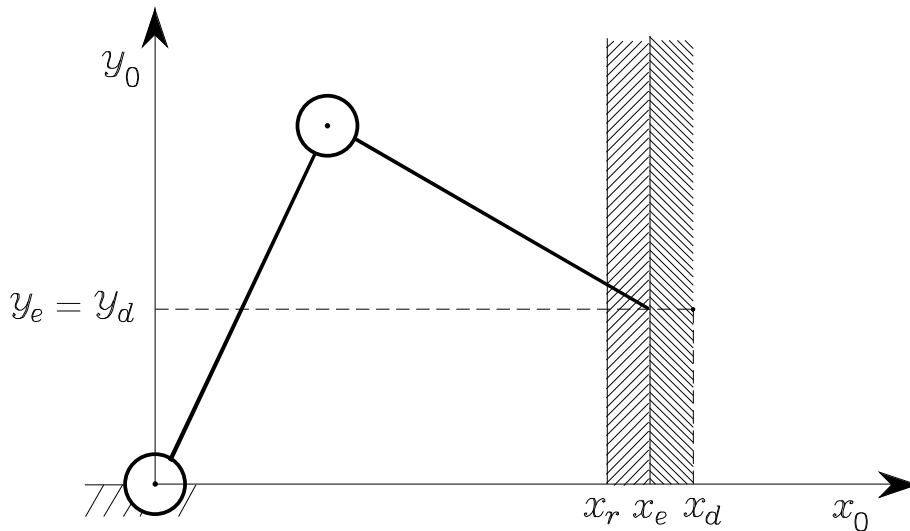


- All'equilibrio

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_d$$

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_d + \mathbf{C}_F(\mathbf{K}(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_e) + \mathbf{f}_d)$$

## Esempio



- Impedenza ( $M_d, K_D, K_P$ ) come sopra
- Riferimenti  $\mathbf{f}_d = [10 \ 0]^T$   $\mathbf{x}_d = [1.015 \ 0.1]^T$
- Controllo di forza

$$\mathbf{C}_F = \text{diag}\{c_{Fx}, 0\}$$

1. controllo con anello interno di posizione

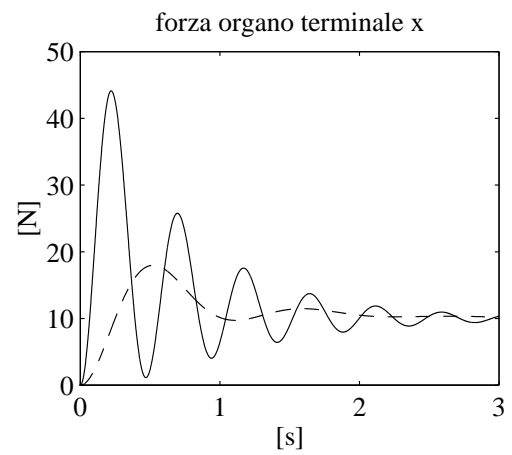
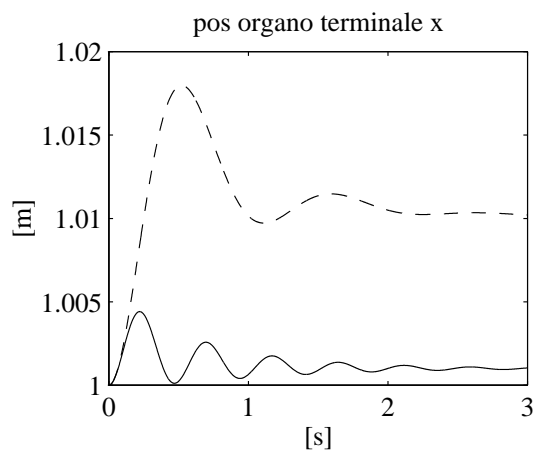
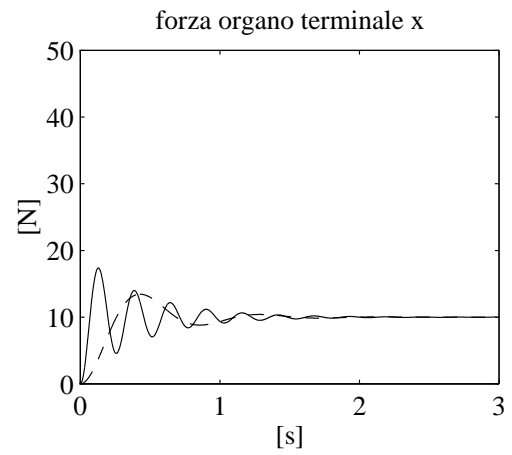
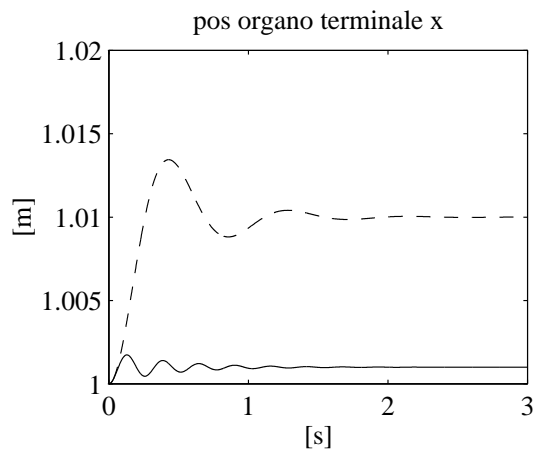
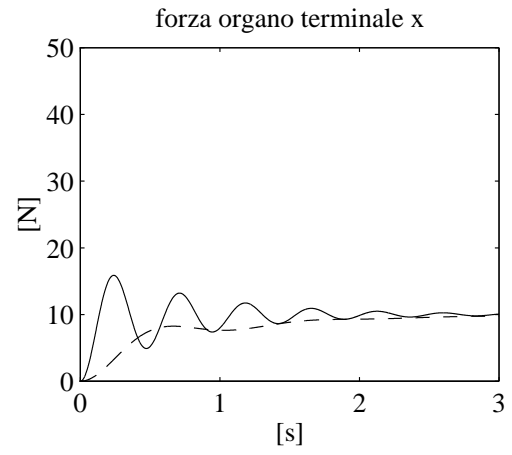
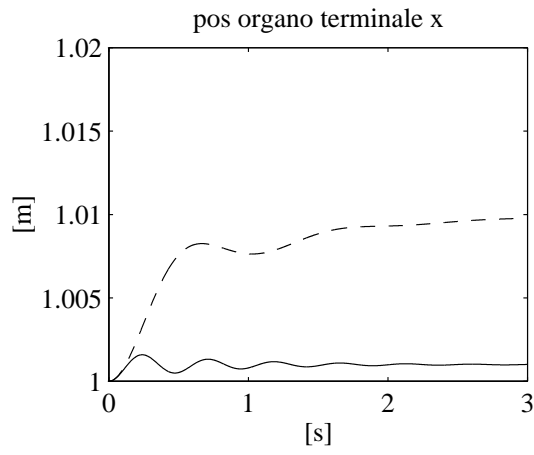
$$k_{Fx} = 0.00064 \quad k_{Ix} = 0.0016$$

2. controllo con anello interno di velocità

$$k_{Fx} = 0.0024$$

3. controllo parallelo

$$k_{Fx} = 0.00064 \quad k_{Ix} = 0.0016$$



## MOTO VINCOLATO

- Situazione di contatto reale
  - ★ vincoli cinematici imposti dall'ambiente sul moto dell'organo terminale
  - ★ durante il moto vincolato, l'organo terminale può esercitare forze e momenti di tipo dinamico
  - ★ la forza e il momento di contatto possono dipendere dalla cedevolezza strutturale del manipolatore, a quella del sensore di forza o di dispositivi
  - ★ deformazioni locali delle parti a contatto (aree di contatto distribuito), attrito statico e dinamico
  
- Ipotesi semplificative per il controllo
  - ★ manipolatore + ambiente perfettamente rigidi, vincoli puramente cinematici
  - ★ manipolatore perfettamente rigido + cedevolezza localizzata nell'ambiente



## Ambiente rigido

- Equazioni di vincolo (vincoli olonomi)

$$\varphi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$$

⇓

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

★  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) = \partial\varphi/\partial\mathbf{q}$ : Jacobiano di vincolo ( $m \times 6$ )

- In assenza di attrito

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\delta\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

★ principio dei lavori virtuali

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}$$

⇓ (ipotesi di contatto mantenuto)

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} = \mathbf{S}_f(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{S}_f^\dagger(\mathbf{q})\mathbf{h}_e$$

$$\mathbf{S}_f^\dagger = (\mathbf{S}_f^T \mathbf{W} \mathbf{S}_f)^{-1} \mathbf{S}_f^T \mathbf{W}$$

- Problema invarianza della soluzione

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{S}_f = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}_f^T \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$$

- Reciprocità

$$\mathbf{h}_e^T \mathbf{v}_e = 0$$

★  $\mathcal{R}(\mathbf{S}_f) \equiv$  sottospazio di controllo di forza

★  $\mathcal{R}(\mathbf{S}_v) \equiv$  sottospazio di controllo di velocità

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{S}_v(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}$$

$$\mathbf{S}_f^T(\mathbf{q})\mathbf{S}_v(\mathbf{q}) = \mathbf{O}$$

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{S}_v^\dagger(\mathbf{q})\mathbf{v}_e$$

- Matrici di selezione:  $\mathbf{S}_f, \mathbf{S}_v, \mathbf{S}_f^\dagger, \mathbf{S}_v^\dagger$

★ proiettore in  $\mathcal{R}(\mathbf{S}_f)$ :  $\mathbf{P}_f = \mathbf{S}_f\mathbf{S}_f^\dagger$

★ proiettore in  $\mathcal{R}(\mathbf{S}_v)$ :  $\mathbf{P}_v = \mathbf{S}_v\mathbf{S}_v^\dagger$

## Ambiente cedevole

- Moto parzialmente vincolato
  - ★ ambiente modellato come coppia di corpi rigidi  $S$  e  $R$

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{S}_f \boldsymbol{\lambda}$$

$$d\mathbf{x}_{r,s} = \mathbf{C} \mathbf{h}_e$$

- ★ spostamento elementare rispetto alla posa di equilibrio

$$d\mathbf{x}_{r,e} = d\mathbf{x}_v + d\mathbf{x}_f$$

$$d\mathbf{x}_v = \mathbf{P}_v d\mathbf{x}_{r,e}$$

$$d\mathbf{x}_f = (\mathbf{I}_6 - \mathbf{P}_v) d\mathbf{x}_{r,e} = (\mathbf{I}_6 - \mathbf{P}_v) d\mathbf{x}_{r,s}$$

$$\mathbf{S}_f^T d\mathbf{x}_{r,e} = \mathbf{S}_f^T d\mathbf{x}_{r,s} = \mathbf{S}_f^T \mathbf{C} \mathbf{S}_f \boldsymbol{\lambda}$$

⇓

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{K}' d\mathbf{x}_{r,e}$$

$$\mathbf{K}' = \mathbf{S}_f (\mathbf{S}_f^T \mathbf{C} \mathbf{S}_f)^{-1} \mathbf{S}_f^T$$

$$d\mathbf{x}_f = \mathbf{C}' \mathbf{h}_e$$

$$\mathbf{C}' = (\mathbf{I}_6 - \mathbf{P}_v) \mathbf{C}$$

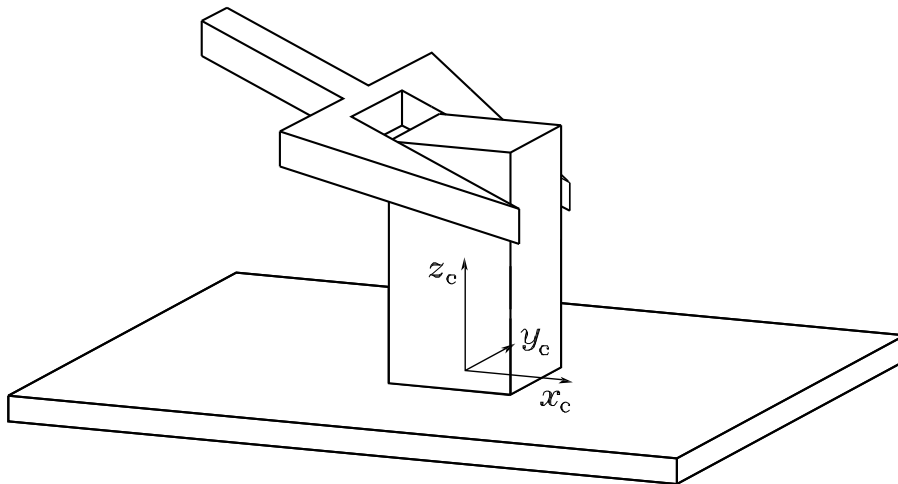
- ★ possibilità di contatto rigido in alcune direzioni

## VINCOLI NATURALI E VINCOLI ARTIFICIALI

- Riferimenti di forza e velocità scelti in maniera congruente all'ambiente
  - ★ non è possibile imporre sia una forza che una velocità lungo la stessa direzione
- Analisi cineto-statica dell'interazione
  - ★ *vincoli naturali* imposti dall'ambiente lungo ciascun grado di libertà del compito (velocità o forza)
  - ★ *vincoli artificiali* soggetti al controllo lungo ciascun grado di libertà del compito (forza o velocità)
- Terna di vincolo  $O_c-x_c y_c z_c$ 
  - ★ descrizione semplificata del compito in termini di vincoli naturali e vincoli artificiali

## Analisi di casi

- Scivolamento su superficie piana



Vincoli Naturali	Vincoli Artificiali
$\dot{\omega}_z^c$	$f_z^c$
$\omega_x^c$	$\mu_x^c$
$\omega_y^c$	$\mu_y^c$
$f_x^c$	$\dot{\omega}_x^c$
$f_y^c$	$\dot{\omega}_y^c$
$\mu_z^c$	$\omega_z^c$

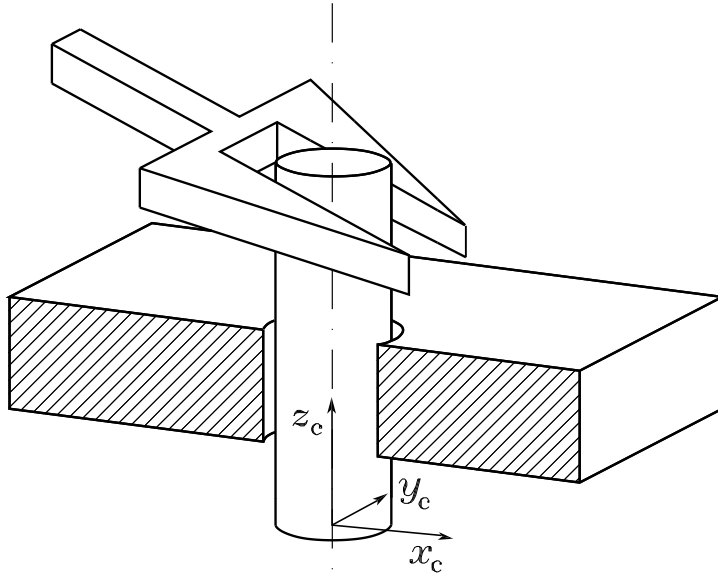
$$\mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

★ in caso di piano elasticamente cedevole (lungo  $z_c$ , intorno a  $x_c, y_c$ )

$$\mathbf{K}'_m = \begin{bmatrix} c_{3,3} & c_{3,4} & c_{3,5} \\ c_{4,3} & c_{4,4} & c_{4,5} \\ c_{5,3} & c_{5,4} & c_{5,5} \end{bmatrix}^{-1}$$

- Inserimento in foro cilindrico

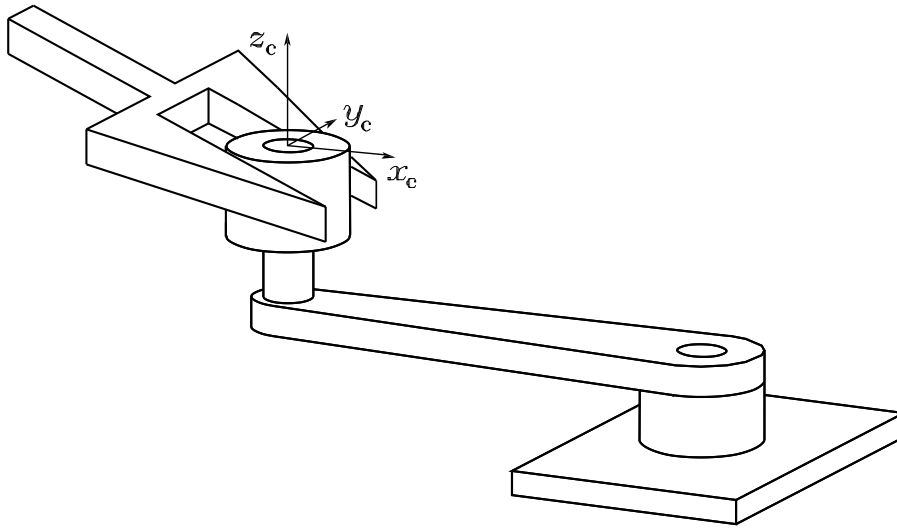


Vincoli Naturali	Vincoli Artificiali
$\dot{\theta}_x^c$	$f_x^c$
$\dot{\theta}_y^c$	$f_y^c$
$\omega_x^c$	$\mu_x^c$
$\omega_y^c$	$\mu_y^c$
$f_z^c$	$\dot{\theta}_z^c$
$\mu_z^c$	$\omega_z^c$

$$\mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotazione di una manovella



Vincoli Naturali	Vincoli Artificiali
$\dot{\theta}_x^c$	$f_x^c$
$\dot{\theta}_z^c$	$f_z^c$
$\omega_x^c$	$\mu_x^c$
$\omega_y^c$	$\mu_y^c$
$f_y^c$	$\dot{\theta}_y^c$
$\mu_z^c$	$\omega_z^c$

$$\mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## CONTROLLO IBRIDO FORZA/MOTO

- Modello dinamico nello spazio operativo

$$\dot{v}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{B}_e(\mathbf{q})\dot{v}_e + \mathbf{n}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\gamma}_e - \mathbf{h}_e$$

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \quad \mathbf{n}_e = \mathbf{J}^{-T} (\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}) - \mathbf{B}_e \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}$$

### Ambiente cedevole

$$d\mathbf{x}_{r,e} = \mathbf{P}_v d\mathbf{x}_{r,e} + \mathbf{C}' \mathbf{S}_f \boldsymbol{\lambda}$$

↓ (terna  $r$  fissa)

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{S}_v \boldsymbol{\nu} + \mathbf{C}' \mathbf{S}_f \dot{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{S}_v^\dagger(\mathbf{q}) \mathbf{v}_e \quad \mathbf{C}' = (\mathbf{I}_6 - \mathbf{P}_v) \mathbf{C}$$

★ terna comune  $\equiv$  terna base,  $\dot{\mathbf{S}}_v = \mathbf{O}$ ,  $\dot{\mathbf{S}}_f = \mathbf{O}$ ,  $\dot{\mathbf{C}}' = \mathbf{O}$

$$\dot{v}_e = \mathbf{S}_v \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}' \mathbf{S}_f \ddot{\boldsymbol{\lambda}}$$

★ controllo a dinamica inversa

$$\boldsymbol{\gamma}_e = \mathbf{B}_e(\mathbf{q}) \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{n}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{h}_e$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_e = \boldsymbol{\alpha}$$

- *Controllo ibrido forza/velocità*

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{S}_v \boldsymbol{\alpha}_v + \boldsymbol{C}' \boldsymbol{S}_f \boldsymbol{f}_\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\alpha}_v$$

$$\ddot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{f}_\lambda$$

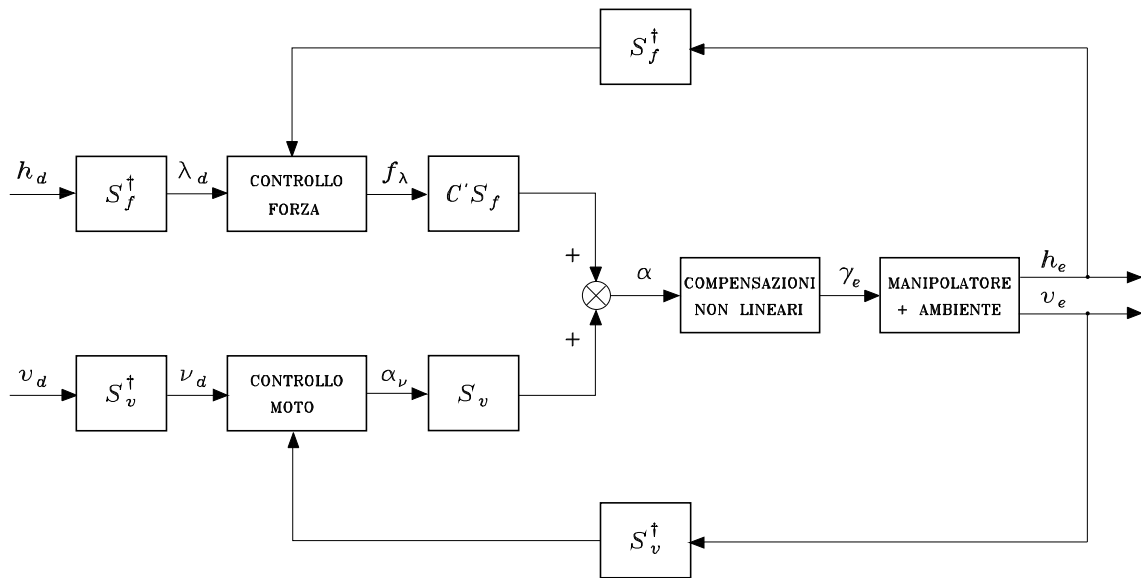
- ★ controllo di velocità

$$\boldsymbol{\alpha}_v = \dot{\boldsymbol{v}}_d + \boldsymbol{K}_{Pv}(\boldsymbol{v}_d - \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{K}_{Iv} \int_0^t (\boldsymbol{v}_d(\varsigma) - \boldsymbol{v}(\varsigma)) d\varsigma$$

- ★ controllo di forza

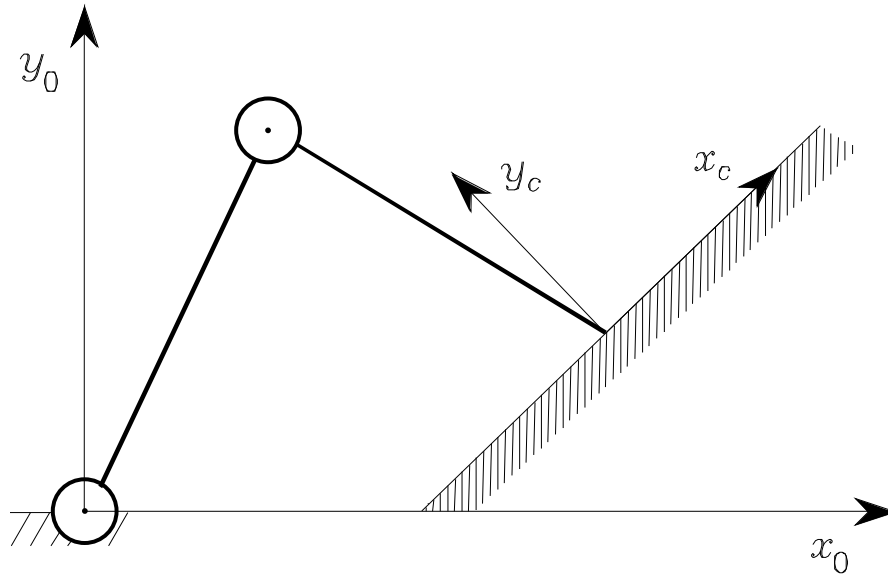
$$\boldsymbol{f}_\lambda = \ddot{\boldsymbol{\lambda}}_d + \boldsymbol{K}_{D\lambda}(\dot{\boldsymbol{\lambda}}_d - \dot{\boldsymbol{\lambda}}) + \boldsymbol{K}_{P\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_d - \boldsymbol{\lambda})$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{S}_f^\dagger \dot{\boldsymbol{h}}_e \quad \dots \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{S}_f^\dagger \boldsymbol{K}' \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \dot{\boldsymbol{q}}$$



★ funziona anche in caso di stima disponibile  $\widehat{C}'$

- Esempio



$$\mathbf{S}_f^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_v^c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_f^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_v^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}'^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2}^{-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}'^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_e^c = \mathbf{S}_v^c \nu + \mathbf{C}'^c \mathbf{S}_f^c \dot{\lambda}$$

★ se  $\mathbf{f}_e^c = [f_x^c \quad f_y^c]^T$ ,  $\mathbf{v}_e^c = [\dot{o}_x^c \quad \dot{o}_y^c]^T$

★  $\nu = \dot{o}_x^c$ ,  $\lambda = f_y^c$

★ in terna base

$$\mathbf{S}_f = \mathbf{R}_c \mathbf{S}_f^c = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_v = \mathbf{R}_c \mathbf{S}_v^c = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{R}_c \mathbf{C}'^c \mathbf{R}_c^T = c_{2,2} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

★ controllo ibrido forza/velocità

$$\dot{\nu} = \ddot{o}_x^c = \alpha_\nu \quad \ddot{\lambda} = \ddot{f}_y^c = f_\lambda$$

## Ambiente rigido

$$\mathbf{B}_e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{n}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\gamma}_e - \mathbf{h}_e$$

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{S}_f \boldsymbol{\lambda}$$

↓

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}_f(\mathbf{q}) \left( \mathbf{S}_f^T \mathbf{B}_e^{-1}(\mathbf{q}) (\boldsymbol{\gamma}_e - \mathbf{n}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) + \dot{\mathbf{S}}_f^T \mathbf{v}_e \right)$$

$$\mathbf{B}_f = (\mathbf{S}_f^T \mathbf{B}_e^{-1} \mathbf{S}_f)^{-1}$$

$$\mathbf{B}_e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{S}_f \mathbf{B}_f(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{S}}_f^T \mathbf{v}_e = \mathbf{P}(\mathbf{q}) (\boldsymbol{\gamma}_e - \mathbf{n}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_6 - \mathbf{S}_f \mathbf{B}_f \mathbf{S}_f^T \mathbf{B}_e^{-1}$$

- modello dinamico di *ordine ridotto*

$$\dot{\mathbf{v}}_e = \mathbf{S}_v \dot{\boldsymbol{\nu}} + \dot{\mathbf{S}}_v \boldsymbol{\nu}$$

- ★ 6 – m equazioni indipendenti

$$\mathbf{B}_v(\mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{S}_v^T \left( \boldsymbol{\gamma}_e - \mathbf{n}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{B}_e(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{S}}_v \boldsymbol{\nu} \right)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}_f(\mathbf{q}) \mathbf{S}_f^T \mathbf{B}_e^{-1}(\mathbf{q}) \left( \boldsymbol{\gamma}_e - \mathbf{n}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{B}_e(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{S}}_v \boldsymbol{\nu} \right)$$

- *Controllo ibrido forza/velocità*

$$\gamma_e = \mathbf{B}_e(\mathbf{q})\mathbf{S}_v\boldsymbol{\alpha}_v + \mathbf{S}_f\mathbf{f}_\lambda + \mathbf{n}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{B}_e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{S}}_v\boldsymbol{\nu}$$

⇓

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\alpha}_v$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}_\lambda$$

- ★ controllo di forza

$$\mathbf{f}_\lambda = \boldsymbol{\lambda}_d + \mathbf{K}_{P\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_d - \boldsymbol{\lambda})$$

$$\mathbf{f}_\lambda = \boldsymbol{\lambda}_d + \mathbf{K}_{I\lambda} \int_0^t (\boldsymbol{\lambda}_d(\varsigma) - \boldsymbol{\lambda}(\varsigma)) d\varsigma$$

- ★ controllo di posizione

$$\boldsymbol{\alpha}_v = \ddot{\mathbf{r}}_d + \mathbf{K}_{Dr}(\dot{\mathbf{r}}_d - \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{K}_{Pr}(\mathbf{r}_d - \mathbf{r})$$